International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 689-706

Equilibrage Minimax Des Contributions Elémentaires Dans L'élimination Symétrique Complete

Hingase Etekiala Michel[1], Butsana Sita Lucien Adam[2], Mutombo Tshishiku James[3]

michelhingase@gmail.com[1], lucienadambutsana@gmail.com[2], jamesmutombo12@gmail.com[3]

Auteur Correspondant : Hingase Etekiala Michel. E-mail : michelhingase@gmail.com

(cc) BY

Résumé : Les factorisations symétriques des matrices définies positives constituent l'un des fondements de l'algèbre linéaire numérique. Les travaux existants se sont principalement attachés à améliorer la stabilité numérique à réduire le remplissage des matrices creuses ou à construire des approximations de faible rang. Dans cet article, nous proposons un point de vue différent :
Nous montrons qu'à toute élimination symétrique complète est naturellement associée une suite de contributions élémentaires correspondant aux diminutions successives de la trace induites par le complément de Schur. La somme de ces contributions est indépendante de l'ordre de l'élimination et coïncide exactement avec la trace de la matrice initiale. L'ordre d'élimination n'agit donc pas sur la quantité totale extraite mais uniquement sur sa séparation au cours de la factorisation.
Cette observation conduit à la formulation d'optimisation : Déterminer l'ordre d'élimination qui minimise la plus grande contribution élémentaire produite pendant toute la factorisation. Nous montrons que ce problème possède une structure récursive naturelle gouvernée par les compléments de Schur et qu'il satisfait le principe d'optimisation de Bellman. Nous établissons plusieurs propriétés fondamentales de cette nouvelle fonction de valeur, caractérisons une famille de factorisations parfaitement équilibrées et analysons une stratégie gloutonne fondée sur la minimisation de la contribution immédiate. Nous démontrons que cette stratégie est optimale en dimension deux et qu'elle constitue en dimension trois, une 2 approximation optimale de la solution minimax.

Mots-clés : matrices symétriques définies positives ; complément de Schur ; ordonnancement d'élimination ; optimisation minimax ; programmation dynamique ; principe d'optimalité de Bellman ; factorisation $L\,DL^T$; stratégie gloutonne,

Abstract. We introduce a new minimax ordering problem for complete symmetric elimination of symmetric positive definite matrices. The elementary trace reduction produced by each Schur complement is interpreted as the immediate cost of an elimination step, and the sequence of these reductions defines the elimination profile of a given ordering. While the total trace reduction is invariant under the elimination order, different orderings distribute this quantity differently across the successive steps. This observation leads to a new optimization criterion: minimize the largest elementary trace reduction over all complete elimination orderings.
We formulate the associated value function and establish its fundamental properties, including a universal lower bound, permutation invariance, homogeneity, and a characterization of perfectly balanced eliminations through the $L\,DL^T$ factorization. We further show that the problem admits a recursive structure satisfying Bellman's principle of optimality, leading to an exact dynamic programming equation.
Finally, we analyze a greedy strategy that selects, at each step, the pivot producing the smallest immediate trace reduction. We prove that this strategy is optimal for 2×2 symmetric positive definite matrices and provide a sharp approximation guarantee in dimension three by showing that its cost is at most twice the optimal minimax value. We also prove that this approximation factor is best possible.

Keywords : symmetric positive definite matrices; Schur complement; elimination ordering; minimax optimization; dynamic programming; Bellman equation; $L\,DL^T$ factorization; greedy algorithm.

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 689-706

1. Introduction

L'élimination symétrique constitue l'un des mécanismes fondamentaux de l'algébre linéaire numérique. Elle intervient notamment dans la factorisation de Cholesky et LDL^T, la résolution des systèmes d'équation, les méthodes de composition de domaine ainsi que dans des nombreux algorithmes de calcul scientifique. A chaque étape, le choix du pivot transforme la matrice de plus petite dimension au moyen d'un complément de Schur. Depuis plusieurs décennies, les travaux consacrés aux ordres d'élimination se sont principalement attachés à trois objectifs : améliorer la stabilité numérique, réduire le remplissage des matrices creuses et construire des approximations de faible rang. Ces approches ont conduit à une théorie riche des stratégies de pivotage, des compléments de Schur et des factorisations matricielles.

Dans cet article, nous adoptons un point de vue différent, au lieu de considérer l'élimination comme une simple suite de transformation matricielles, nous l'interprétons mesurables de la matrice active. Cette interprétation conduit naturellement à associer à tout ordre d'élimination une suite de contributions positives décrivant l'évolution du processus. Nous montrons que la somme de ces contributions est indépendante de l'ordre d'élimination extraient la même quantité totale : Elles différent uniquement par la manière dont cette quantité est répartie entre les différentes étapes. Cette observation conduit à un nouveau problème d'optimisation :

Comment choisir l'ordre d'élimination afin de répartir le plus uniformément possible les contributions produites au cours du processus d'élimination ? Nous formulons ce problème sous la forme d'un problème de minimax sur les ordres d'élimination. Nous introduisons la fonction valeur correspondante et montrons que le processus possède une structure récursive satisfaisant les hypothèses du principe de Bellman ; il en résulte une équation de programmation dynamique gouvernant la valeur optimale. Nous établissons ensuite plusieurs propriétés fondamentales de cette fonction, analysons une stratégie gloutonne fondée sur la minimisation de la contribution immédiate t démontrons qu'elle est optimale en dimension deux. Notre principal résultat montre qu'en dimension trois cette stratégie fournit toujours une solution dont le cout est au plus deux fois la valeur optimale et que cette constante ne peut être amélioré.

L'article est organisé comme suit. La section 2 introduit les contributions élémentaires et formule le problème minimax. La section 3 établit les premières de cette fonction de valeur. La section 4 développe la formulation récursive et démontre l'équation de Bellman. La section 5 est consacrée à l'analyse de la stratégie gloutonne. La section6 présente le résultat principal en dimension 3 ainsi que plusieurs perspectives. La section 7 donne une interprétation possibles et enfin la section 8 une conclusion.

2. Formulation du problème minimax

2.1 Contributions associées à une élimination complète

On note S_{++}^n le cône des matrices réelles symétriques définies positives d'ordre n :

Soit A $\in S_{++}^n$ et soit q $\in \{1, 2, \dots, n\}$ un indice de pivot après une permutation symétrique plaçant cet indice en première position, la matrice s'écrit :

$$P_q^T A P_q = \begin{pmatrix} a & r^T \\ r & c \end{pmatrix}$$

$$a > 0$$

Ou

P_q est une matrice de permutation r $\in \mathbb{R}^{n-1}$ et c $\in S^{n-1}$: L'élimination du pivot q conduit au complément de Schur

$$S_q(A) = c - \frac{rr^T}{a}$$

La définition positive de A entraine celle $S_q(A)$: Le complément de Schur constitue donc la matrice active du problème après élimination du pivot. La quantité étudiée dans cet article est la diminution de la trace provoquée par cette transition. Nous définissons la contribution d'élimination du pivot q par :

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 689-706

$$J_A(q) = \text{tr}(A) - \text{tr}\, S_q(A) \quad (2.1)$$

Cette définition ne dépend pas de la permutation utilisée pour placer le pivot en première position : En effet :

$$\text{tr}\, S_q(A) = \text{tr}\,(C) - \frac{1}{a}\, tr(rr^T)$$

Comme :

$$tr(rr^T) = \|r\|_2^2$$

On obtient :

$$J_A(q) = a + \frac{\|r\|_2^2}{a} \quad (2.2)$$

En revenant aux coefficients de la matrice initiale ; cette densité s'écrit :

$$J_A(q) = a_{qq} + \frac{1}{a_{qq}} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq q}}^{n} a_{qj}^2 \quad (2.3)$$

$$J_A(q) = \frac{(A^2)_{qq}}{a_{qq}}$$

En particulier $J_A(q) > 0$ pour tout pivot admissible.

Considérons maintenant un ordre complet d'élimination :

$$\pi = (\pi_1, \ldots\ldots, \pi_n)$$

On pose :

$$A_0^{\pi} = A$$

Puis on définit une récursivement

$$A_k^{\pi} = S_{\pi k}(A_{k-1}^{\pi}) \quad (2.4)$$

$$k = 1, \ldots\ldots, n-1$$

A l'étape k, l'indice π_k est compris relativement à l'ensemble des indices encore actifs. LA contribution produite à cette étape est :

$$J_k^{(\pi)} = J_{A_{k-1}^{(\pi)}}(\pi_k) \quad (2.5)$$

$$k = 1, \ldots\ldots, n$$

La dernière contribution étant le dernier scalaire positif restant ;

$$J^{(\pi)} = (J_1^{(\pi)}, \ldots, J_n^{(\pi)}) \quad (2.6)$$

Le vecteur sera appelé le profil d'élimination associé à l'ordreπ. La propriété suivante justifie l'étude de la répartition des composantes de ce profil.

Proposition 2.1 : Conservation des contributions

Pour tout A $\in S_{++}^n$ et tout ordre complet π :

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 689-706

$$\sum_{k=1}^{n} J_k^{(\pi)} = tr(A)$$

Démonstration :

Par définition :

$$J_k^{(\pi)} = tr(A_{k-1}^{(\pi)}) - tr(A_k^{(\pi)})$$

La somme devient :

$$\sum_{k=1}^{n} J_k^{(\pi)} = \sum_{k=1}^{n} [\, tr(A_{k-1}^{(\pi)}) - tr(A_k^{(\pi)}) \,]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\, tr(A_0^{(\pi)}) - tr(A_n^{(\pi)}) \,] \qquad (2.7)$$

Comme $A_0^{(\pi)} = A$ et que $A_n^{(\pi)}$ est la matrice vide de trace nulle on obtient la relation (2.7), cette conservation montre que le choix de l'ordre ne modifie pas la somme totale des contributions. Il agit uniquement sur leur distribution au cours de l'élimination.

2.2 Valeur minimax

Pour un ordre π, nous mesurons son déséquilibre par la plus grande composante de son profil :

$$C(A, \pi) = \left\| J^{(\pi)} \right\|_{\infty}$$

$$= max_{1 \le k \le n} J_k^{(\pi)} \qquad (2.8)$$

Le problème étudié consiste à minimiser ce cout sur S_n des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ nous définissons ainsi la valeur minimax.

$$V(A) = min_{\pi \le S_n} max_{1 \le k \le n} J_k^{(\pi)} \qquad (2.9)$$

Une permutation réalisant ce minimum sera appelée un ordre minimax de A. Son existence est immédiate puisque S_n est fini. La conservation (2.7) fournit la première borne universelle pour toute permutation (π).

$$max_{1 \le k \le n} J_k^{(\pi)} \ge \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} J_k^{(\pi)} = \frac{tr(A)}{n}$$

Par conséquent :

$$V(A) \ge \frac{tr(A)}{n} \qquad (2.10)$$

L'égalité dans (2.10) est possible si et seulement si, il existe un ordre dont toutes les contributions sont égales à $\frac{tr(A)}{n}$: Une telle élimination sera dite parfaitement équilibrée.

3. Propriétés fondamentales de la fonction valeur

3.1 premières propriétés fondamentales de la fonction valeur

La fonction valeur introduite constitue l'objet central de cette étude, avant d'établir sa structure récursive, il est nécessaire d'en analyser les premières propriétés, certaines découlent directement du théorème de conservation démontré tandis que d'autres sont spécifiques au problème minimax. La première propriété fournit la borne universelle indépendante de tout ordre d'élimination.

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 689-706

Proposition 3.1 :

Pour toute matrice A $\in S_{++}^{n}$:

$$V(A) \geq \frac{tr(A)}{n}$$

Démonstration : La démonstration repose sur une inégalité classique de l'analyse réelle : le maximum d'une famille finie de nombre réels est toujours supérieur ou égal à leur moyenne arithmétique. En appliquent cette propriété au profil d'élimination en utilisant le théorème de conservation établi à la proposition (2.1) on obtient la relation (2.10)

$$\sum_{k=1}^{n} J_k^{(\pi)} = tr(A)$$

Par conséquent

$$max_{1\leq k\leq n}\, J_k^{(\pi)} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k^{(\pi)}$$

En minimisant sur π ; on obtient :

$$V(A) \geq \frac{tr(A)}{n}$$

Cette borne possède une interprétation immédiate elle représente la meilleur valeur théorique que pourrait atteindre toute stratégie d'élimination si les contributions étaient parfaitement réparties. Cette observation conduit à la définition suivante.

Définition 3.1 : Une élimination complète sera dite parfaitement équilibrée lorsque toutes les contributions élémentaires sont identiques. Autrement dit :

$$J_1^{(\pi)} = J_2^{(\pi)} = \ldots, J_n^{(\pi)} = \frac{tr(A)}{n}$$

Proposition 3.2 : Toute élimination parfaitement équilibrée est une solution optimale du problème minimax.

Démonstration : Si un ordre π est parfaitement équilibré alors :

$$J_1^{(\pi)} = J_2^{(\pi)} = \ldots, J_n^{(\pi)} = \frac{tr(A)}{n}$$

Son cout vaut :

$$C\,(A,\pi) = \frac{tr(A)}{n}$$

D'après la proposition 3.1 aucune stratégie ne peut faire mieux.

Ainsi :

$$C\,(A,\pi) = V(A)$$

3.2 Les invariants et cas particuliers :

Proposition 3.3 :

La fonction de valeur est invariante par permutation symétrique, plus précisément pour toute matrice de permutation P.

$$V(P^T A\, P) = V(A)$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 689-706

Démonstration : Soit σ la permutation associée à P et posons :

$$\tilde{A} = P^T A\, P$$

A tout ordre d'élimination

$$\pi = (\pi_1, \ldots\ldots, \pi_n)$$

De A associons l'ordre

$$\tilde{\pi} = (\sigma^{-1}(\pi_1), \ldots\ldots, (\sigma^{-1}(\pi_n))$$

De $\tilde{A}$

Une permutation symétrique ne fait que renommer simultanément les lignes et les colonnes. A chaque étape, les matrices actives obtenues dans deux éliminations sont donc reliées par une permutation symétrique. Comme la trace est invariante par permutation :

$$tr(Q^T B\, Q) = tr(B)$$

Les contributions correspondantes sont identiques :

$$J_k^{(\breve{\pi})}(\tilde{A}) = J_k^{(\pi)}(A)$$

$$k = 1, \ldots\ldots, n$$

Ainsi :

$$C(\tilde{A}, \breve{\pi}) = C(A, \pi)$$

L'application $\pi \to \breve{\pi}$ étant bijective sur l'ensemble des permutations, les ensembles de cout admissible coïncident, par conséquent :

$$V(P^T A\, P) = V(A)$$

Proposition 3.4 :

La propriété suivante est essentielle car elle montre que le minimax évolue linéairement avec l'échelle de la matrice. Pour tout A $\in S_{++}^n$ et tout scalaire $\lambda >> 0$

$$V(\lambda A) = \lambda V(A)$$

Démonstration :

Soit π un ordre d'élimination de A. A chaque étape le complément de Schur vérifie :

$$S_q(\lambda B) = \lambda S_q(B)$$

Par conséquent :

$$J_{\lambda B}(\mathrm{q}) = \mathrm{tr}\,(\lambda B) - tr(S_q(\lambda B))$$

$$= \lambda \mathrm{tr}\,(B) - \lambda tr(S_q(B))$$

$$= \lambda J_B(\mathrm{q})$$

Le profil associé au même ordre est donc multiplié par :

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 689-706

$$J_{\lambda A}^{(\pi)}(\mathrm{q}) = \lambda J_{A}^{(\pi)}$$

Ainsi

$$C\ (A,\pi) = \lambda\ \ C\ (A,\pi)$$

En minimisant sur tous les ordres :

$$V(\lambda A) = min_{\pi}\ C\ (\lambda A,\pi)$$
$$= \lambda min_{\pi}\ C\ (\ A,\pi)$$
$$V(\lambda A) = \lambda V(A)$$

Cette homogénéité permet de normaliser la matrice sans modifier la nature du problème. En particulier, l'étude du rapport entre une stratégie donnée et la valeur optimale peut être menée sous une normalisation

$$\mathrm{tr}\ (A) = 1\ ou\ \mathrm{V}\ (A) = 1$$

Proposition 3.5 : Cas des matrices diagonales

Soit

$$A = diag\ (a_{11}, \dots, a_{nn})$$

Alors tout ordre d'élimination possède le même cout et $V(A) = max_{1\le i\le n} a_i$

Démonstration :

Puisque A est diagonale, l'élimination d'un pivot a_q ne modifie pas les autres éléments diagonaux. Le complément de Schur associé au pivot q est simplement la matrice diagonale obtenue en supprimant a_q. La contribution correspondant vaut donc :

$$J_A(\mathrm{q}) = \mathrm{tr}\ (A) - tr(S_q(\mathrm{A}))$$
$$= a_q$$

Pour tout ordre

$$\pi = (\ \pi_1\ , \dots..\ ,\pi_n)$$

Le profil d'élimination est ainsi :

$$J^{(\pi)} = (a_{11}, \dots, a_{nn})$$

Il s'agit seulement d'une permutation des éléments diagonaux de A par conséquent :

$$C\ (A,\pi) =\ max_{1\le k\le n} a_{\pi k}$$
$$C\ (A,\pi) =\ max_{1\le i\le n} a_i$$

Indépendamment de (π) . En minimisant sur tous les ordres :

$$\mathrm{V}\ (A) =\ max_{1\le i\le n} a_i$$

Cette proposition montre que l'ordonnancement ne présente aucun avantage pour une matrice diagonale, l'ordre ne peut redistribuer les contributions puisqu'aucune interaction entre les pivots n'est présente.

Corollaire 3.1 :

Une matrice diagonale est parfaitement équilibrée si et seulement si tous ces éléments diagonaux sont égaux

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 689-706

$$V(A) = \frac{tr(A)}{n}$$

Equivaut à

$$max_i\, a_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_i$$

Pour tout nombre strictement positifs, cette égalité est réalisée si et seulement si

$$a_1 = \ldots a_n$$

Ainsi le calcul diagonal l'équilibre parfait ne peut provenir de l'ordonnancement il doit déjà être présent dans la matrice elle-même. Les propriétés précédentes mettent en évidence plusieurs caractéristiques générales de la fonction valeur. Nous ne nous intéressons maintenant à une question plus fine. Comment reconnaitre, pour une matrice générale, les ordres d'élimination qui atteignent la borne moyenne ? La réponse repose sur une interprétation de la factorisation $L\,DL^T$ en termes de contributions élémentaires.

3.3 Caractérisations des éliminations parfaitement équilibrées

Les propriétés précédentes mettent en évidence plusieurs caractéristiques fondamentales de la fonction valeur. Elles montrent notamment que toute stratégie d'élimination parfaitement équilibrée demeure une question ouverte. Comment reconnaitre pour une matrice symétrique définie positive que les ordres d'élimination qui réalisent cet équilibre ?

Pour répondre à cette question, nous établissons un lien entre les contributions élémentaires introduites à la section 2 et la factorisation $L\,DL^T$ associée à un ordre d'élimination fixé. La factorisation $L\,DL^T$ est un résultat classique de l'algèbre linéaire numérique ; elle est utilisée ici comme un outil permettant d'exprimer explicitement les contributions successives d'élimination. Soit donc π un ordre d'élimination :

$$P_\pi^T A P_\pi = L_\pi D_\pi L_\pi^T$$

La factorisation $L\,DL^T$ correspondante ou L_π^T est triangulaire inférieure est donnée par la relation suivante :

$$D_\pi = diag\,(d_1^{(\pi)}\ , \ldots , d_n^{(\pi)}\ )$$

$$d_k^{(\pi)} > 0$$

En notant $l_k^{(\pi)}$ la $k^{\text{ième}}$ colonne de L_π^T ; La décomposition précédente peut être réécrite sous la forme :

$$P_\pi^T A P_\pi = \sum_{k=1}^{N} d_k^{(\pi)}\, l_k^{(\pi)} (l_k^{(\pi)})^T$$

Lemme 3.1 :

Ce résultat établit le lien fondamental entre cette représentation classique et les contributions élémentaires définies dans la section 2. Pour tout ordre d'élimination π, la contribution produite à la $k^{\text{ième}}$ étape est donnée par :

$$J_k^{(\pi)} = d_k^{(\pi)} \left\| l_k^{(\pi)} \right\|_2^2$$

Démonstration :

Le terme $d_k^{(\pi)} l_k^{(\pi)} (l_k^{(\pi)})^T$ est la contribution de rang à la $k^{\text{ième}}$ étape de la factorisation $L\,DL^T$ sa trace vaut :

$$tr(d_k^{(\pi)} l_k^{(\pi)} (l_k^{(\pi)})^T) = d_k^{(\pi)}\ tr(l_k^{(\pi)} (l_k^{(\pi)})^T)$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 689-706

Or

$$tr(l_k^{(\pi)}(l_k^{(\pi)})^T) = \left\| l_k^{(\pi)} \right\|_2^2$$

On obtient donc

$$J_k^{(\pi)} = d_k^{(\pi)} \left\| l_k^{(\pi)} \right\|_2^2$$

Le terme précédent fournit une expression explicite des contributions élémentaires. Il permet maintenant de caractériser complétement les éliminations parfaitement équilibrées.

Proposition 3.6 :

Soit π un ordre d'élimination fixé. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- L'ordre π est parfaitement équilibré
- Il existe un réel $a\ \lambda > 0$ tel que

$$d_k^{(\pi)} = \frac{\lambda}{\left\| l_k^{(\pi)} \right\|_2^2}$$

$$k = 1, \dots, n$$

Dans ce cas

$$\lambda = \frac{tr(A)}{n}$$

$$\lambda = V(A)$$

Démonstration :

D'après le lemme 3.1 :

$$J_k^{(\pi)} = d_k^{(\pi)} \left\| l_k^{(\pi)} \right\|_2^2$$

Ainsi

$$J_k^{(\pi)} = \lambda$$

Si et seulement si

$$d_k^{(\pi)} = \frac{\lambda}{\left\| l_k^{(\pi)} \right\|_2^2}$$

En vertu du théorème de conservation (proposition 2.1) donne ensuite :

$$tr(A) = \sum_{k=1}^{n} J_k^{(\pi)}$$

$$tr(A) = n\lambda$$

D'où

$$\lambda = \frac{tr(A)}{n}$$

Enfin, la proposition 3.1 montre qu'aucune stratégie ne peut produire une valeur inférieure à cette quantité l'ordre π est donc minimax

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 689-706

$$V(A) = \lambda$$

Corollaire 3.2 :

Pour tout ordre d'élimination fixé π et tout réel $\lambda > 0$, la matrice A s'écrit comme étant :

$$A = P_\pi L_\pi diag\left(\frac{\lambda}{\left\|l_1^{(\pi)}\right\|_2^2}, \dots, \frac{\lambda}{\left\|l_k^{(\pi)}\right\|_2^2}\right) L_\pi^T P_\pi^T$$

Admet une élimination parfaitement équilibrée suivant l'ordre π.

4. Structure récursive du problème minimax :

Les propriétés établies dans la section précédente décrivent les caractéristiques fondamentales de la fonction valeur. Elles ne fournissent cependant pas de procédure permettant de la calculer cette propriété résulte directement du fait qu'après élimination d'un premier pivot, le problème restant est de même nature que le problème initial mais porte sur une matrice de dimension inférieure. Cette autosimilarité permet de formuler le problème dans le cadre de la programmation dynamique.

4.1 Décomposition récursive :

Soit A ∈ S_{++}^n et soit q un pivot admissible. L'élimination de ce pivot produit immédiatement une contribution $J_A(q)$ et transforme la matrice active en son complément de Schur

$$S_q(A) \text{ A} \in S_{++}^n$$

La suite du processus consiste alors à résoudre exactement le même problème sur une nouvelle matrice. Cette observation conduit au résultat suivant :

Proposition 4.1 : Principe de décomposition

Soit A ∈ S_{++}^n après élimination d'un premier pivot q, Le problème restant est un problème minimax identique appliquée à la matrice $S_q(A)$.

Démonstration :

Par définition, l'élimination du pivot remplace la matrice active A par le complément de Schur$S_q(A)$. Les étapes suivantes consistent uniquement à poursuivre l'élimination sur cette nouvelle matrice selon les définitions introduites à la section2. Le sous problème obtenue possède donc exactement la même structure que le problème initial : Seule la dimension est réduite à l'unité. La proposition précédente montre que toute stratégie d'élimination peut être décomposée en un premier choix suivi d'une stratégie d'élimination peut être décomposée en un premier choix suivi d'une stratégie appliquée au complément de Schur correspondant.

4.2 Décomposition du Cout

Considérons une stratégie dont le pivot est q. Le cout total de cette stratégie est déterminé par la plus grande contribution produite pendant l'élimination, deux situations peuvent alors se présenter soit cette contribution maximale est produite dès la première étape, soit elle apparait au cours des étapes suivantes. Le résultat suivant formalise cette observation :

$$C_q(A) = \max\{J_A(q), V(S_q(A))\}$$

Démonstration :

Toute stratégie commençant par le pivot q produit d'abord la contribution $J_A(q)$ les contributions restantes proviennent exclusivement d'une stratégie appliquée au complément de Schur $S_q(A)$, Le meilleur cout possible pour cette seconde partie est précisément $V\left(S_q(A)\right)$.

Les propositions 4.1 et 4.2 montrent que le problème minimax satisfait les hypothèses classiques de la programmation dynamique déterministe à l'horizon fini. On en déduit immédiatement l'équation récursive suivante qui constitue le résultat central de cette section.

4.3 Equation de Bellman :

Théorème 4.1 :

La fonction de valeur vérifie pour toute matrice A ∈ S_{++}^n l'équation récursive :

$$V(A) = min_q \max\{J_A(q), V(S_q(A))\}$$

Démonstration :

D'après la proposition 4.2 ; Le cout minimal parmi toutes les stratégies commençant par le pivot q est :

$$C_q(A) = \max\{J_A(q), V(S_q(A))\}$$

La valeur optimale étant définie comme le minimum de ces couts sur l'ensemble des pivots admissibles : On obtient

$$V(A) = min_q C_q(A)$$

Ce qui donne immédiatement :

$$V(A) = min_q \max\{J_A(q), V(S_q(A))\}$$

Corollaire :

Le problème minimax d'ordonnancement appartient à la classe des problèmes de programmation dynamique déterministes à l'horizon fini. Par conséquent, les stratégies optimales satisfont le principe d'optimalité de Bellman. Apres un choix optimal le sous problème restant doit être résolu de manière optimale.

5. Analyse de la stratégie gloutonne :

L'équation de Bellman obtenue à la section précédente fournit une caractérisation exacte de la stratégie optimale. Sa résolution nécessite toutefois l'exploration récursive de l'ensemble des pivots admissibles ce qui devient rapidement couteux lorsque la dimension augmente.

Il est donc naturel de rechercher des stratégies plus simples reposant uniquement sur une information locale tout en conservant des garanties théoriques sur leur qualité. La plus naturelle consiste à choisir à chaque étape, le pivot produisant la plus faible contribution élémentaire immédiate. Cette section est consacrée à l'étude de la stratégie.

5.1 Définitions et propriétés élémentaires :

Soit A ∈ S_{++}^n , A chaque étape la stratégie gloutonne choisit un pivot $q_G \epsilon \arg min_q J_A(q)$ Apres élimination de ce pivot, la même règle est appliquée récursivement au complément de Schur correspondant. Cette stratégie ne tient compte que du cout immédiat et ignore l'influence des choix présents sur les étapes futures. Elle constitue ainsi l'approximation locale la plus simple de la stratégie optimale définie par l'équation de Bellman. La proposition suivante compare directement les deux critères de décision.

Proposition 5.1 :

Pour toute matrice symétrique définie positive d'ordre deux, ma stratégie gloutonne est optimale.

Démonstration :

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 689-706

Apres le choix du premier pivot, le second est imposé. L'équation de Bellman se réduit donc à une comparaison entre les deux pivots possibles. Comme le cout futur est indépendant de toute décision supplémentaire, minimiser la contribution revient à minimiser le cout global.

Le résultat précédent montre que le premier cas ou la stratégie gloutonne peut différer de la stratégie optimale apparait en dimension trois.

5.2 Analyse du cas Tridimensionnel

A partir de la dimension trois, le premier choix influence la structure du complément de Schur et par conséquent les contributions produites lors des étapes suivantes, l'optimalité de la stratégie gloutonne n'est alors plus garantie. Nous montrons néanmoins qu'elle satisfait une borne d'approximation universelle.

Théorème 5.1 :

Pour toute matrice symétrique définie positive d'ordre trois :

$$C_G(A) \leq 2V(A)$$

Ou

$C_G(A)$ Désigne le cout de la stratégie gloutonne. Apres une permutation symétrique des indices autorisée par la proposition 3.3 ; on peut supposer que :

$$q_G = 1$$

Posons

$$G_i = J_A(i)$$

$$i = 1, 2, 3$$

Le choix glouton indique

$$G_1 \leq G_2 \, , G_1 \leq G_3 \qquad (5.1)$$

Apres élimination du premier pivot, le sous problème est de dimension deux. D'après le théorème (5.1) ; La stratégie gloutonne y est optimale. Par conséquent :

$$C_G(A) = \max\{G_2 \, , V(S_1(A)\} \qquad (5.2)$$

Il suffit donc de comparer cette quantité à $V(A)$, par4 homogénéité positive de la fonction de valeur établie à la proposition (3.4); Nous pouvons normaliser

$$V(A) = 1 \qquad (5.3)$$

Soit π^* un ordre minimax, si π^* commence par le pivot 2 ou par le pivot 3. Les deux situations étant symétriques, il suffit de considérer un ordre optimal commençant par 2. Il existe alors deux continuations possibles (2, 1, 3) ou (2, 3, 1) comme l'ordre optimal commence par 2 et possède un cout égal à 1, sa première contribution vérifie :

$$G_2 \leq 1$$

En combinant cette relation avec (5.1) ; on obtient :

$$G_1 \leq 1 \qquad (5.4)$$

Il reste donc à montrer que :

$$V(S_1(A) \leq 2 \qquad (5.5)$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 689-706

Premier Cas : L'ordre optimal est (2, 1, 3)

Ecrivons la factorisation LDL^T correspondant à cet ordre

$$P^T AP = LDL^T$$

Avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = diag\ (p, q, r) \qquad (5.6)$$

$$p, q, r > 0$$

Les contributions de l'ordre (2, 1, 3) sont d'après le lemme 3.1 :

$$J_1 = P\ (1 + x^2 + y^2)$$

$$J_2 = q\ (1 + z^2)$$

$$J_3 = r \qquad (5.7)$$

Puisque cet ordre est optimal et que $V(A) = 1$;

$$J_1 \leq 1\ ,\ J_2 \leq 1\ ;\ \ r \leq 1 \qquad (5.8)$$

Dans l'ordre (2, 1, 3)

$$LDL^T = \begin{pmatrix} p & px & py \\ px & px^2 + q & pxy + qz \\ py & pxy + qz & py^2 + qz^2 + r \end{pmatrix} \qquad (5.9)$$

La variable originale 1, choisie par la stratégie gloutonne correspond à la deuxième coordonnée de cette matrice, son élimination donne :

$$S_1(A) = \begin{pmatrix} s & sh \\ sh & r + sh^2 \end{pmatrix}$$

Ou

$$s = \frac{pq}{px^2+q}\ ;\ \ h = y - zx$$

Considérons dans ce sous-problème d'ordre deux, l'ordre qui élimine d'abord la première variable son profil est : (s $(1+h^2), r)$

Par conséquent :

$$V(S_1\ (A) \leq \max\{s\ (1 + h^2), r\} \qquad (5.13)$$

Comme $px^2 + q \geq q$

$$s = \frac{pq}{px^2+q} \leq \ p \qquad (5.14)$$

Par ailleurs

$$py^2 + qz^2 - sh^2 = \frac{(pxy+qz)^2}{px^2+q} \geq 0$$

D'où

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 689-706

$$sh^2 \leq py^2 + qz^2$$

$$sh^2 \leq p\,(1 + x^2 + y^2) + q(1 + z^2) \qquad (5.16)$$

$$sh^2 = j_1 + j_2$$

$$sh^2 \leq 2$$

Comme $r \leq 1$, Les relations (5.13) et (5.16) donnent :

$$V(S_1\,(A) \leq \ 2 \qquad (5.17)$$

Deuxième cas : L'ordre optimal est (2, 1, 3)

On utilise la factorisation LDL^T associé à cet ordre avec les mêmes notations que dans (5.6) les contributions vérifient encore

$$p\,(1 + x^2 + y^2) \leq 1$$

$$q(1 + z^2) \leq 1 \ \ ; \ \ r \leq 1 \qquad (5.18)$$

Cette fois-ci, la variable originale 1 correspond à la troisième coordonnée de LDL^T.

Ecrivons :

$$LDL^T = \begin{pmatrix} M & v \\ v^T & \text{ɣ} \end{pmatrix}$$

Avec

$$M = \begin{pmatrix} p & px \\ px & px^2 + q \end{pmatrix} \qquad (5.19)$$

Apres élimination de cette troisième coordonnée.

$$S_1(A) = M - \frac{vv^T}{\text{ɣ}} \qquad (5.20)$$

Comme $\frac{vv^T}{\text{ɣ}}$ est semi – définie.

$$S_1(A) \leq M$$

On en déduit :

$$tr(S_1(A)) \leq tr\ (\mathrm{M})$$

$$= p(1 + x^2) + q \qquad (5.21)$$

Or

$$p(1 + x^2) \leq p(1 + x^2 + y^2) \leq 1$$

Et

$$q \leq q(1 + z^2) \leq 1$$

Ainsi

$$tr\big(S_1(A)\big) \leq 2 \qquad (5.22)$$

Le cout minimax de toute matrice symétrique définie positive est inférieur ou égal à sa trace par conséquent :

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 689-706

$$V(S_1(A)) \leq tr(S_1(A)) \leq 2 \qquad (5.23)$$

Dans les deux cas, nous avons établi (5.5) en combinant (5.2), (5.4) et (5.5)

$$C_G(A) = \max\{G_1, V(S_1(A)\}$$

$$\leq 2$$

Sous normalisation $V(A) = 1$cela donne :

$$C_G(A) \leq 2V(A)$$

L'homogénéité positive permet de rétablir l'échelle initiale ce qui achève la démonstration.

5.4 Optimalité du facteur 2 :

Le théorème 5.2 fournit une borne supérieure uniforme. Nous montrons maintenant que cette borne ne peut être améliorée.

Théorème 5.3 :

La constante 2 du théorème 5.2 est optimale, plus précisément :

$$Sup_{A\epsilon S^3} \frac{C_G(A)}{V(A)} = 2$$

Démonstration :

La borne supérieure

$$\frac{C_G(A)}{V(A)} \leq 2$$

Découle directement du théorème 5.2. Il suffit de construire une famille de matrices pour laquelle ce rapport tend vers 2.

Soit $t > 0$ et $\delta > 0$, Considérons

$$A_{t,\delta} = \begin{pmatrix} t^2 & 0 & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ t^2 & t & (2+\delta)t^2 \end{pmatrix} \quad ' \qquad (5.24)$$

Les mineurs principaux dominants valent :

$$\Delta_1 = t^2 > 0$$

$$\Delta_2 = t^2 > 0$$

Et

$$\det(A_{t,\delta}) = \delta t^4 > 0$$

Le critère de Sylvester donne donc

$$A_{t,\delta}\epsilon S_{++}^3 \qquad (5.25)$$

Les contributions initiales sont :

$$JA_{t,\delta}(1) = 2t^2 \qquad (5.26)$$

$$JA_{t,\delta}(2) = 1 + t^2 \qquad (5.27)$$

$$JA_{t,\delta}(3) = (2+\delta)t^2 + \frac{1+t^2}{2+\delta} \qquad (5.28)$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 689-706

Pour δ > 0 fixé et suffisamment petit :

$$JA_{t,\delta}(1) < JA_{t,\delta}(3) < JA_{t,\delta}(2)$$

La stratégie gloutonne choisit donc le pivot après élimination :

$$S_1(A_{t,\delta}) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & (1+\delta)t^2 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Pour tout suffisamment petit, le pivot le plus petite diagonale est le second. Le profil glouton est alors :

$$\left(2t^2\ , (1+\delta)t^2 + \tfrac{1}{1+\delta}\ , \tfrac{\delta}{1+\delta}\right) \quad (5.30)$$

Pour $\delta > 0$ suffisamment petit, le premier terme est asymptotiquement dominant

$$\lim_{t\to 0} C_G\left(A_{t,\delta}\right) = \tfrac{1}{1+\delta} \quad (5.31)$$

Considérons maintenant l'ordre concurrent $(3,\ 1,\ 2\ )$ son profil est :

$$\left((2+\delta)t^2 + \tfrac{1+t^2}{2+\delta}\ , \tfrac{1+t^2}{2+\delta} + \tfrac{1}{(2+\delta)(1+\delta)}, \tfrac{\delta}{1+\delta}\right) \quad (5.32)$$

Pour δ > 0 suffisamment petit, le premier terme est asymptotiquement dominant $\lim_{t\to 0} C\left(A_{t,\delta}, (3,\ 1,\ 2\ )\ \right) = \tfrac{1}{2+\delta}$ (5.33)

Puisque $\mathrm{V}(A_{t,\delta})$ est inférieur ou égal au cout de tout ordre particulier

$$\mathrm{V}(A_{t,\delta}) \leq\ C\left(A_{t,\delta}, (3,1,2\ )\ \right)$$

Il résulte

$$\frac{C_G(A_{t,\delta})}{\mathrm{V}(A_{t,\delta})} \geq \frac{C_G(A_{t,\delta})}{C\left(A_{t,\delta},(3,1,2\ )\ \right)} \quad (5.34)$$

En faisant tendre t vers zéro :

$$\lim_{t\to 0} inf\ \frac{C_G(A_{t,\delta})}{\mathrm{V}(A_{t,\delta})} \geq \frac{2+\delta}{1+\delta} \quad (5.35)$$

Enfin

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{2+\delta}{1+\delta}\ = 2 \quad (5.36)$$

Ainsi pour tout Ɛ > 0, il existe δ > 0 puis t > 0 suffisamment petit tels que :

$$\frac{C_G\left(A_{t,\delta}\right)}{\mathrm{V}(A_{t,\delta})} > 2 - \square$$

Par conséquent

$$Sup_{A\epsilon\ ^3} \frac{C_G(A)}{V(A)} \geq 2$$

La borne inverse du résultat du théorème 5.2, on conclut que :

$$Sup_{A\epsilon S^3} \frac{C_G(A)}{V(A)} = 2$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 689-706

6. Discussion et perspectives

Nous avons formulé un problème minimax fondé sur les diminutions successives de trace au cours d'une élimination symétrique complète. La somme des contributions étant toujours égal à tr(A), l'ordre agit uniquement sur leur répartition. L'équation de Bellman :

$$V(A) = min_q \max\{J_A(q), V(S_q(A))\}$$

Fournit une caractéristique exacte de la stratégie optimale mais son calcul devient rapidement couteux lorsque la dimension augmente. La stratégie gloutonne est optimale en dimension trois :

$$C_G\left(A_{t,\delta}\right) \leq 2V(A)$$

Avec une constante 2 optimale plusieurs questions restent ouvertes :

- Déterminer le rapport d'approximation en dimension supérieur
- Identifier des classes de matrices pour lesquelles le glouton reste optimal
- Développer des stratégies à horizon limité
- Etudier la complexité du calcul exact de $V(A)$
- Etendre le cadre aux matrices non symétriques

7. Interprétations possibles :

La contribution :

$$J_A(\mathrm{q}) = \mathrm{tr}\,(A) - tr(S_q(\mathrm{A}))$$

Peut-être interprétée de plusieurs manières complémentaires. Dans la factorisation LDL^T elle correspond à la trace d'un terme du rang un

$$J_k^{(\pi)} = tr(d_k^{(\pi)} l_k^{(\pi)} (l_k^{(\pi)})^T)$$

Dans la formulation dynamique elle constitue le cout immédiat associé à la transition $A \to S_q(A)$: Dans l'interprétation géométrique, elle mesure l'énergie portée par un » direction extraite au cours d'une procédure apparentée à une orthogonalisation des lignes d'un facteur de Gramm, ces lectures différentes suggèrent que le problème peut être relié à d'autres domaines de l'analyse matricielle, de l'optimisation séquentielle et des méthodes numériques.

8. Conclusion :

Nous avons introduit une nouvelle fonction de valeur associée à l'ordonnancement des éliminations symétriques. Chaque pivot produit une contribution égale à la diminution de la trace correspondante et de la suite de ces contributions forme le profil d'élimination. Le problème minimax consiste à minimiser la plus grande composante de ce profil.

Nous avons établi une borne inférieure universelle qui caractérise les éliminations parfaitement équilibrées dérivé de l'équation de Bellman et analysé la stratégie gloutonne.

Le résultat principal montre que cette stratégie est exacte en dimension deux et constitue une 2-approximation optimale en dimension 3.

RÉFÉRENCE

[1] Bellman, R. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press.

[2] Bertsekas, D. P. (2017). *Dynamic Programming and Optimal Control* (4th ed., Vols. I–II). Athena Scientific.

[3] Bertsekas, D. P. (2016). *Nonlinear Programming* (3rd ed.). Athena Scientific.

[4] George, A., & Liu, J. W. H. (1981). *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*. Prentice-Hall.

[5] Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). *Matrix Computations* (4th ed.). Johns Hopkins University Press.

[6] Harbrecht, H., Peters, M., & Schneider, R. (2012). On the low-rank approximation by the pivoted Cholesky decomposition. *Applied Numerical Mathematics*, 62(4), 428–440.

[7] Higham, N. J. (2002). *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms* (2nd ed.). SIAM.

[8] Horn, R. A., & Johnson, C. R. (2012). *Matrix Analysis* (2nd ed.). Cambridge University Press.

[9] Horn, R. A., & Johnson, C. R. (1991). *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press.

[10] Zhang, F. (Ed.). (2005). *The Schur Complement and Its Applications*. Springer.

[11] Davis, T. A. (2006). *Direct Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM.

[12] Bunch, J. R., & Parlett, B. N. (1971). Direct methods for solving symmetric indefinite systems of linear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 8(4), 639–655.

[13] Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2022). *Introduction to Algorithms* (4th ed.). MIT Press.