International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

Correction Récursive D'une Paire Propre Pour Les Matrices Symétriques Emboitées Sous Bordage Par Blocs

Butsana Sita Lucien Adam[1], Hingase Etekiala Michel[2], Mumbanza Musungu Armel[3]

[1]lucienadambutsana@gmail.com, [2]michelhingase@gmail.com, [3]mumbanzaarmel@gmail.com

Corresponding Author : Butsana Sita Lucien Adam. E-mail: lucienadambutsana@gmail.com

(cc) BY

Résumé : Nous développons une procédure de correction récursive d'une paire propre pour des matrices réelles symétriques emboitées sous bordage par blocs. Le cas d'une nouvelle coordonnée est d'abord traité comme problème local 2×2.
Pour un bloc de m nouvelles coordonnées, la correction à valeur propre fixée se réduit exactement à un problème spectral symétrique de dimension $(m+1) \times (m+1)$ construit à partir de la paire propre approchée, de son résidu et du nouveau bloc.
Nous établissons la mise à jour de Rayleigh, l'identité exacte du résidu final, un certificat de séparation spectrale, la propagation de l'erreur et la convergence sous bordages successifs. Le régime non résonnant est développé à ordre arbitraire et relié à une équation exacte de branche, à un point fixe et à Newton.
Le régime résonnant est classifié pour un espace résonnant de multiplicité arbitraire. Des vérifications numériques confirment les identités et des ordres asymptotiques obtenus.
Mots clés : Matrices symétriques ; paire propre ; matrices emboitées ; bordage par blocs, correction récursive ; résidu, séparation spectrale ; équation séculaire ; perturbation ; convergence.
Abstract: We develop a recursive eigenpair-correction framework for nested real symmetric matrices under block bordering. The one-coordinates case is fisrt treated as a local 2x2 problem. For a block of m new coordinates,, the fixed-eigenvalue correction reduces exactly to a symmetric $(m+1) \times (m+1)$ spectral problem bult from the approximate eigenpair, its stored residual and the new block.
We derive the Rayleigh update, an exact final-residual identity, a spectral-separation certificate, error propagation and convergence under successive block borderings. The non-resonant regime is developed to arbitrary order and linked to an exact branch equation, a fixed-point iteration and Newton's method. The resonant regime is clasified for arbitrary resonant multiplicity. Numeral checks confirm the identities and predicted asymptotic orders.

Keywords. Symmetric matrices ; eigenpair tracking ; block bordering ; residual correction ; spectral separation ; secular equation ; perturbation ; convergence.

1. Introduction

La détermination des valeurs propres et des vecteurs propres est un problème central de l'algèbre linéaire numérique. Dans de nombreuses applications, la matrice n'est toutefois pas fixe : de nouvelles variables, observation sou contraintes agrandissent, progressivement, le problème. Une situation naturelle consiste alors à disposer d'une suite de matrices emboitées et à vouloir suivre une seule branche spectrale d'une dimension à la suivante.

Nous considérons, ici, le cas réel symétrique. A l'étape k, une paire propre approchée $(\hat{\lambda}_k, \hat{u}_k)$ et son résidu sont supposés disponibles. Lorsqu'une nouvelle ligne et une nouvelle colonne sont adjointes, l'objectif n'est pas de recommencer une diagonalisation complète, mais de corriger localement cette paire propre en exploitant les informations déjà calculées.

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

Les mises à jour QR, par rotation de Givens, les matrices flèches, les équations séculaires et la théorie de perturbation des valeurs propres sont des outils classiques.

Le présent travail ne repose donc pas sue la revendication de ces mécanismes pris séparément. Le point central est l'articulation d'une correction locale à partir de la paire approchée et de son résidu, d'un coût linéaire par paire lorsque ce résidu est stocké, d'un contrôle de séparation spectrale et d'une hiérarchie récursive des corrections.

La section 2 fixe le cadre scalaire, utilisé comme cas de base. Les sections 3 à 8 établissent la correction locale, la mise à jour de Rayleigh, les développements asymptotiques, l'éqyuation exacte et le cas résonnant pour une nouvelle coordonnée.

La section 9 donne une première validation numérique. Ma section 10 généralise ensuite l'ensemble de la construction à un bordage symétrique par un bloc arbitraire de m coordonnées, y compris la convergence globale, les régimes non résonnant et les vérifications numériques.

2. Cadre et notations

Soit $A_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ une matrice réelle symétrique. Son extension par bordage symétrique est

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & \epsilon_k\, b_k \\ \epsilon_k\, b_k^T & \alpha_k \end{pmatrix},\ b_k \in \mathbb{R}^k, \epsilon_k, \alpha_k \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

On suppose, disponible, une paire propre approchée normalisée $(\hat{\lambda}_k, \hat{u}_k)$ avec

$$\|\hat{u}_k\|_2 = 1, \quad r_k = A_k\hat{u}_k - \hat{\lambda}_k\hat{u}_k \qquad (2)$$

Lorsque nécessaire, on suppose que $\hat{\lambda}_k$ est le quotient de Rayleigh :

$$\hat{\lambda}_k = \hat{u}_k^T A_k \hat{u}_k \qquad (3)$$

Nous utilisons les deux scalaires

$$d_k = \alpha_k - \hat{\lambda}_k, \quad g_k = b_k^T\hat{u}_k \qquad (4)$$

3. Correction locale d'une paire propre

3.1. Prolongement de la direction

On prolonge la direction $\hat{u}_k$ par une nouvelle coordonnée scalaire η :

$$\hat{u}_{k+1}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\begin{pmatrix}\hat{u}_k \\ \eta\end{pmatrix} \qquad (5)$$

A valeur propre fixée $\hat{\lambda}_k$, le résidu associé vaut

$$(A_{k+1} - \hat{\lambda}_k I)\hat{u}_{k+1}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\begin{pmatrix} r_k + \eta\epsilon_k b_k \\ \epsilon_k g_k + \eta d_k\end{pmatrix} \qquad (6)$$

Sa norme au carré est donc

$$\psi_k(\eta) = \frac{C_k + 2Q_k\eta + D_k\eta^2}{1+\eta^2} \qquad (7)$$

Où

$$C_k = \|r_k\|_2^2 + \epsilon_k^2 g_k^2, \qquad (8)$$

$$Q_k = \epsilon_k(b_k^T r_k + d_k g_k), \qquad (9)$$

$$D_k = \epsilon_k^2\|b_k\|_2^2 + d_k^2 \qquad (10)$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

3.2. Réduction exacte à un problème 2 × 2

Considérons la matrice symétrique

$$G_k = \begin{pmatrix} C_k & Q_k \\ Q_k & D_k \end{pmatrix} \tag{11}$$

Proposition 3.1. le minimum de ψ_k est la plus petite valeur propre de G_k. En particulier,

$$\psi_k^{min} = \frac{C_k + D_k - \sqrt{(D_k - C_k)^2 + 4Q_k^2}}{2} \tag{12}$$

Démonstration.

Pour tout vecteur unitaire $(a, c)^T \epsilon \mathbb{R}^2$, le résidu à valeur propre fixée est la combinaison linéaire des deux colonnes

$$q_{1=}\begin{pmatrix} r_k \\ \epsilon_k g_k \end{pmatrix}, \; q_{2=}\begin{pmatrix} \epsilon_k b_k \\ d_k \end{pmatrix}$$

Le carré de sa norme est

$$\|aq_1 + cq_2\|_2^2 = (a \;\; c) G_k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Le minimum sur le cercle unité est donc la plus petite valeur propre G_k. CQFD.

Lorsque la direction minimisante possède une première composante non nulle, elle peut être paramétrée par $\eta = {}^{c}/_{a}$. Une écriture numériquement stable est

$$\eta_k = \frac{2Q_2}{D_k - C_k + \sqrt{(D_k - C_k)^2 + 4Q_2^2}} \tag{13}$$

La formulation matricielle 2x2 reste, toutefois, fondamentale, notamment lorsque $Q_k = 0$: selon que $C_k < D_k \; ou \; D_k < C_k$, la direction optimale peut être l'ancienne composante ou la nouvelle coordonnée.

4. Mise à jour de Rayleigh et certificat spectral

Soit v_{n+1} la direction unitaire issue du problème précédent. On met à jour la valeur propre par

$$\hat{\lambda}_{k+1} = v_{k+1}^T A_{k+1} v_{k+1} \tag{14}$$

Dans la paramétrisation par η_k^* et sous l'hypothèse (3),

$$\hat{\lambda}_{k+1} = \frac{\hat{\lambda}_k + 2\epsilon_k \eta_k^* g_k + \alpha_k (\eta_k^*)^2}{1 + (\eta_k^*)^2} \tag{15}$$

Le résidu final est

$$r_{k+1} = A_{k+1} v_{k+1} - \hat{\lambda}_{k+1} v_{k+1} \tag{16}$$

On obtient l'identité

$$\|r_{k+1}\|_2^2 = \psi_k^{min} - \left(\hat{\lambda}_{k+1} - \hat{\lambda}_k\right)^2 \tag{17}$$

Ainsi, le quotient de Rayleigh réduit encore le résidu après la correction de direction.

4.1. Séparation spectrale

Supposons maintenant qu'une branche exacte simple $(\lambda_k, \; u_k)$ soit suivi et posons

$$\rho_k = |\epsilon_k| \|b_k\|_2 \tag{18}$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

La perturbation de bordage

$$\epsilon_k = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_k b_k \\ \epsilon_k b_k^T & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifie exactement $\|\epsilon_k\|_2 = \rho_k$

Définissons la séparation de référence

$$\delta_k = min\{u\epsilon\sigma(A_k)^{min}, u \neq \lambda_k|\lambda_k - \alpha_k|\} \quad (19)$$

Une condition simple de non-croisement local est $2\rho_k < \sigma_k$. Après prise en compte du déplacement de l'approximation, soit

$$g_{-k+1} = \sigma_k - \rho_k - \Delta_k^R \quad (20)$$

Lorsque $g_{-k+1} > 0$, le théorème résidu-séparation donne

$$sin < (u_{k+1}, u_{k+1}) \leq \frac{\|r_{k+1}\|_2}{g_{-k+1}} \quad (21)$$

Cette inégalité fournit un certificat local : la qualité de la paire propre mise à jour est contrôlée par le résidu et par l'isolement spectral de la branche.

5. Régime non résonnant et développement asymptotique

Supposons, désormais, que (λ_k, u_k) soit une paire propre exacte, $\|u_k\|_2 = 1$ et que

$$d_k = \alpha_k - \lambda_k \neq 0, \quad g_k = b_k^T u_k$$

Au premier ordre non trivial,

$$\eta_1 = -\frac{g_k}{d_k}, \quad \lambda_2 = -\frac{g_k^2}{d_k} \quad (22)$$

Par conséquent,

$$\xi(\epsilon_k) = \epsilon_k \eta_1 + 0(\epsilon_k^3) \quad (23)$$

$$\lambda(\epsilon_k) = \lambda_k + \epsilon_k^2 \lambda_2 + 0(\epsilon_k^4) \quad (24)$$

Le déplacement spectral principal est donc quadratique dans le régime non-résonnant.

Posons

$$b_k^1 = b_k - g_k u_k, \; R_k = \left[(A_k - \lambda_k I)_{|u_k^1}\right]^2 \quad (25)$$

La première correction transverse de l'ancienne composante est

$$\omega_2 = \frac{g_k}{d_k} R_k b_k^1 \quad (26)$$

Le prolongement scalaire seul produit alors un résidu d'ordre $0(\epsilon_k^2)$, tandis que l'ajout de ω_2 pousse ce résidu à l'ordre (ϵ_k^3).

5.1. Correction cubique

Définissons

$$H_k = (b_k^1)^T R_k b_k^1 \quad (27)$$

Le coefficient cubique de la nouvelle coordonnée est

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

$$\eta_3 = \frac{g_k^3}{d_k^3} - \frac{g_k H_k}{d_k^2} \tag{28}$$

et le coefficient quartique de la valeur propre vaut

$$\lambda_4 = g_k \eta_3 = \frac{g_k^4}{d_k^3} - \frac{g_k^2 H_k}{d_k^2} \tag{29}$$

Ainsi

$$u^{(3)}(\epsilon_k) = \begin{pmatrix} u_k + \epsilon_k^2 \omega_2 \\ \epsilon_k \eta_1 + \epsilon_k^3 \eta_3 \end{pmatrix} \tag{30}$$

a un résidu d'ordre $0(\epsilon_k^4)$ après normalisation et mise à jour de Rayleigh. La hiérarchie est donc :

$$0(\epsilon_k),\ \ 0(\epsilon_k^2),\ \ 0(\epsilon_k^3),\ \ 0(\epsilon_k^4)$$

aux niveaux successifs de correction.

6. Récursion à ordre arbitraire

Considérons

$$A(\epsilon) = \begin{pmatrix} A_k & \epsilon b_k \\ \epsilon b_k^T & 0_k \end{pmatrix},\ \ S = diag(I, -1)$$

Comme $A(-\epsilon) = SA(\epsilon)S$, une branche propre simple possède une structure de parité : la valeur propre et l'ancienne composante sont polaires en ϵ, la nouvelle coordonnée est impaire. On écrit donc

$$\lambda(\epsilon) = \lambda_k + \sum_{m\geq 1} \epsilon^{2m}\, \lambda_{2m} \tag{31}$$

$$x(\epsilon) = u_k + \sum_{m\geq 1} \epsilon^{2m}\, u_{2m} \tag{32}$$

$$\xi(\epsilon) = \lambda_k + \sum_{m\geq 1} \epsilon^{2m}\, \eta_{2m+1} \tag{33}$$

Sous la normalisation intermédiaire $u_k^T u_{2m} = 0$, les coefficients vérifient

$$\lambda_{2m} = g_k \eta_{2m-1} \tag{34}$$

$$\omega_{2m} = R_k \left[\sum_{r=1}^{m-1} \lambda_{2r} \omega_{2(m-r)} - \eta_{2m-1} b_k^1 \right] \tag{35}$$

$$\eta_{2m+1} = \frac{\sum_{r=1}^{m} \lambda_{2r(m-r)+1} - b_k^T \omega_{2m}}{d_k} \tag{36}$$

L'initialisation est $\eta_1 = -{}^{g_k}/_{d_k}$. Les relations précédentes reproduisent successivement $\lambda_2,\ \omega_2,\ \eta_3,\ \lambda_4$ puis les ordres supérieurs.

7. Equation séculaire exacte et convergente locale

Ecrivons

$$\lambda(\epsilon_k) = \lambda_k + z,\ \ \ L_k = (A_k - \lambda_k I)_{u_k},\ \ R_k(z) = (L_k - zI)^{-1}$$

Définissons

$$h_k(z) = (b_k^1)^T R_k(z) b_k^1 \tag{37}$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

La branche issue de λ_k satisfait exactement

$$z|d_k - z - \epsilon_k^2(z)| + \epsilon_k^2 g_k^2 = 0 \tag{38}$$

Lorsque $g_k \neq 0$, un vecteur propre non normalisé associé est

$$u(\in_k) = \begin{pmatrix} u_k - \frac{z}{g_k} R_k(z) b_k^1 \\ \frac{z}{\in_k g_k} \end{pmatrix} \tag{39}$$

Le développement de (38) fournit les coefficients asymptotiques précédents. Si $g_k = 0$, la solution $z = 0$ montre que la branche $(\lambda_k, (u_k, 0)^T)$ est exactement conservée.

7.1. Point fixe

L'équation (38) peut être écrite

$$z = F_k(z) = -\frac{\epsilon_k^2 g_k^2}{d_k - z - \epsilon_k^2 h_k(2)} \tag{40}$$

Soit

$$\gamma_k = min_{\mu \epsilon \sigma(A_k), \mu \neq \lambda_k} |\mu - \lambda_k|$$

Pour $0 < r < \gamma_k$,

$$|h_k(z)| \leq \frac{\|b_k^1\|_2^2}{\gamma_k - r}, \quad |h'_k(z)| \leq \frac{\|b_k^1\|_2^2}{(\gamma_k - r)^2} \quad (|z| \leq r) \tag{41}$$

On pose

$$m_k(r) = |d_k| - r \in_k^2 \frac{\|b_k^1\|_2^2}{\gamma_k - r} \tag{42}$$

Si $m_k(r) > 0, {\epsilon_k^2 g_k^2}/{m_k(r)} \leq r$ et

$$q_k(r) = \frac{\epsilon_k^2 g_k^2 \left[1 + \epsilon_k^2 \|b_k^1\|_2^2 / (\gamma_k - r)^2\right]}{m_k(r)^2} < 1 \tag{43}$$

alors F_k est une contraction sur l'intervalle $|-r, r|$. Le point fixe est unique et l'itération converge.

7.2. Newton

Introduisions

$$\phi_k(z) = z[d_k - z - \epsilon_k^2 h_k(z)] + \epsilon_k^2 g_k^2 \tag{44}$$

L'itération de Newton est

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{\phi_k(z^{(m)})}{\phi'_k(z^{(m)})} \tag{45}$$

Sous les conditions locales usuelles $|\phi'_k| \geq v > 0 \; et \;\; |\phi"_k| \leq M$, on a l'estimation quadratique

$$\left|z^{(m+1)} - z^*\right| \leq \frac{M}{2v} \left|z^{(m)} - z^*\right|^2 \tag{46}$$

Les approximations d'ordre deux ou quatre constituent des initialisations naturelles de Newton.

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

8. Cas résonnant

Lorsque

$$d_k = \alpha_k - \lambda_k = 0$$

l'équation exacte devient

$$z^2 + \epsilon_k^2 h_k(z) z - \epsilon_k^2 g_k^2 = 0 \qquad (47)$$

Si $g_k \neq 0$, en posant $G_k = |g_k|, H_k = h_k(0)\ et\ H_{1,k} = (b_k^1)^T L_k b_k^1$, les deux branches sont

$$z_\pm = \pm \in_k G_k - \frac{\in_k^2}{2} H_k \pm \epsilon_k^3 \left(\frac{H_k^2}{8G_k} - \frac{G_k H_{1,k}}{2} \right) + 0(\in_k^4) \qquad (48)$$

Le dédoublement est donc linéaire en $\in_k$ au premier ordre. Les vecteurs propres dominants tendent vers les combinaisons équilibrées

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_k \\ \pm sgn(gk) \end{pmatrix} \qquad (49)$$

Si $g_k = 0$, on obtient

$$z = [z + \epsilon_k^2 h_k(z)] = 0$$

Une branche reste exactement $z_1 = 0$ et l'autre vérifie

$$z_2 = -\epsilon_k^2 H_k + \epsilon_k^4 H_k H_{1,k} + 0(\epsilon_k^G) \qquad (50)$$

9. Algorithme scalaire et coût

Si $\left(\hat{\lambda}_k, \hat{u}_k, r_k\right)$ est stockée, la mise à jour locale peut être organisée comme suit :

1. Calculer $g_k = b_k^T \hat{u}_k, b_k^T T_k$ et $\|b_k\|_2^2$;
2. Construire C_k, Q_k, D_k ;
3. Résoudre le problème symétrique 2x2 pour obtenir la direction locale optimale ;
4. Calculer $\hat{\lambda}_{k+1}$ par quotient de Rayleigh ;
5. Mettre à jour le résidu par les formules de bordage ;
6. Accepter ou rejeter la paire suivant le résidu et la séparation spectrale ;
7. Si nécessaire, effectuer un raffinement asymptotique ou une itération sur l'équation séculaire ;

Le calcul des produits scalaires et la construction du nouveau résidu utilisent 0(k) opérations pour une seule paire propre, tandis que le problème 2x2 est de coût constant. Cette propriété suppose que le résidu r_k soit conservé d'une étape à la suivante.

10. Validation numérique

Nous considérons

$$A = diag(-3, -1, 0.7, 2.5, 5) \quad \lambda_k = 0.7, \quad \alpha = 1.8$$

avec

$$b = (0.55 - 0.35, 0.8, 0.45 - 0.25)^T$$

on obtient

$$d = 1.1, \quad g = 0.8, \quad \lambda_2 = -0.581818 \ldots, \quad \lambda_1 = 0.321904 \ldots$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

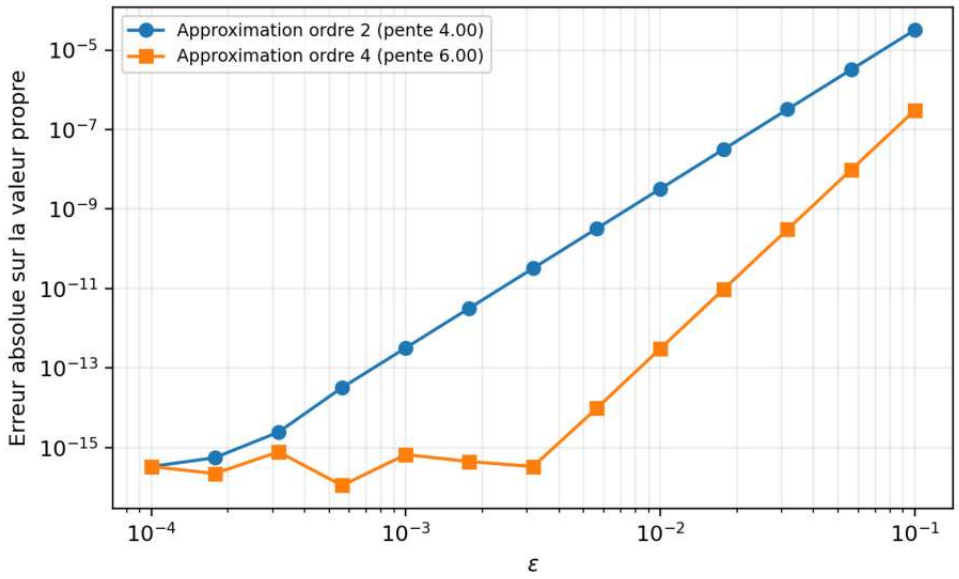


Figure 1 – Ordres observés pour l'approximation de la valeur propre.

La première expérience compare l'erreur sur la valeur propre obtenue avec le développement limité à l'ordre deux, puis à l'ordre quatre.

Les pentes observées sont respectivement proches de 4 et 6, conformément aux ordres théoriques attendus.

La seconde expérience mesure la norme du résidu après correction scalaire, après ajout de la correction transverse, puis après ajout de la correction cubique.

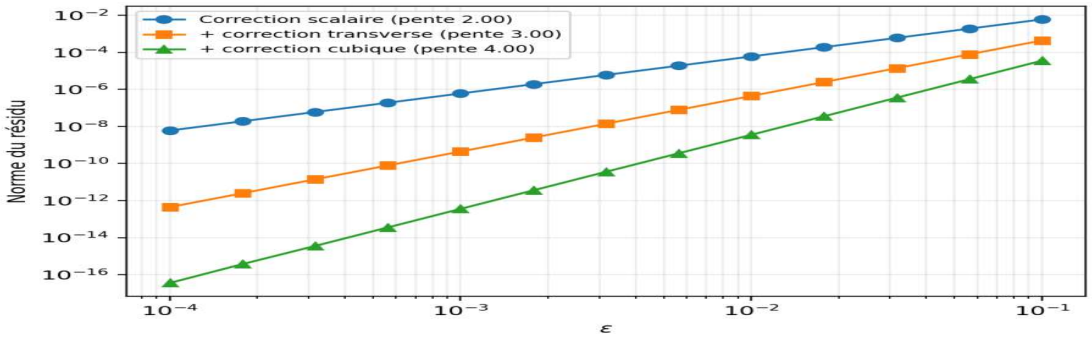


Figure 2 – Ordres observés pour la norme du résidu.

Les pentes observées sont proches de 2, 3 et 4. La hiérarchie des corrections est donc reproduite numériquement.

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

11. Généralisation au bordage symétrique par blocs

11.1. Structure matricielle générale

$$A_{n+m} = \begin{pmatrix} A_n & \epsilon B \\ \epsilon B^T & C \end{pmatrix},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C = C^T \in \mathbb{R}^{m\times m} \quad (51)$$

Soit une paire propre approchée normalisée

$$A_n \hat{u}_n = \hat{\lambda}_n \hat{u}_, + r_n,\ \ \|\hat{u}_n\|_2 = 1 \quad (52)$$

On cherche une direction corrigée dans le sous-espace engendré par l'ancien vecteur propre et les nouvelles coordonnées :

$$v(a,y) = \begin{pmatrix} a\hat{u}_n \\ y \end{pmatrix},\ \ y\epsilon\mathbb{R}^m,\ a^2 + \|y\|_2^2 = 1 \quad (53)$$

Posons

$$g = B^T \hat{u}_n,\ D = C - \hat{\lambda}_n I_m \quad (54)$$

Alors

$$\left(A_{n+m} - \hat{\lambda}_n I\right) v(a,y) = \begin{pmatrix} ar_n + \epsilon By \\ a\varepsilon g + Dy \end{pmatrix} \quad (55)$$

En introduisant

$$z = \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix},\ \ K_m = \begin{pmatrix} r_n & \epsilon B \\ \epsilon g & D \end{pmatrix} \quad (56)$$

On a

$$\left(A_{n+m} - \hat{\lambda}_n I\right) v = K_m z \quad (57)$$

La matrice locale de Gram est

$$G_{m+1} = K_m^T K_m = \begin{pmatrix} \|r_n\|_2^2 + \epsilon^{2g^T} g & \epsilon(r_n^T B + g^T D) \\ \epsilon\left(B^T r_n + D_g\right) & \epsilon^{2B^T} B + D^2 \end{pmatrix} \quad (58)$$

Proposition 11.1. (Réduction par blocs).

La direction qui minimise le résidu à valeur propre fixée est un vecteur propre unitaire de G_{m+1} associée à sa plus petite valeur propre. En particulier,

$$min_{\|z\|_{2=1}} \|K_m z\|_2^2 = \sigma_{min}(K_m) = \sqrt{\lambda_{min}(G_{m+1})} \quad (59)$$

et

$$min_{\|z\|_{2=1}} \|K_m z\|_2^2 = \lambda_{min}(G_{m+1}) \quad (60)$$

Le cas $m = 1$ redonne le problème 2x2 ; m=2 donne 3x3 ; m=3 donne 4x4 ; en général, m nouvelles coordonnées donnent un problème local $(m + 1) \times (m + 1)$.

11.2. Cas explicite m=2 : problème local 3x3

Ecrivons

$$A_{n+2} = \begin{pmatrix} A_n & \epsilon b_1 & \epsilon b_2 \\ \epsilon b_1^T & \alpha_1 & \beta \\ \varepsilon b_2^T & \beta & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (61)$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

Posons

$$g_i = b_i^T, \hat{u}_n, \quad d_i = \alpha_i - \hat{\lambda}_n$$

La matrice locale s'écrit

$$G_3 = \begin{pmatrix} C_0 & Q_1 & Q_2 \\ Q_1 & D_1 & E \\ Q_2 & E & D_2 \end{pmatrix} \tag{62}$$

avec

$$C_0 = \|r_n\|_2^2 + \varepsilon^2(g_1^2 + g_2^2) \tag{63}$$

$$Q_1 = \varepsilon(b_1^T r_n + d_1 g_1 + \beta g_2) \tag{64}$$

,

$$Q_2 = \varepsilon(b_2^T r_n + \beta g_1 + d_2 g_2) \tag{65}$$

$$D_1 = \varepsilon^2\|b_1\|_2^2 + d_1^2 + \beta^2 \tag{66}$$

$$D_2 = \varepsilon^2\|b_2\|_2^2 + d_2^2 + \beta^2 \tag{67}$$

$$E = \varepsilon^{2b_1^T b_2} + \beta(d_1 + d_2) \tag{68}$$

11.3. Cas explicite m=3 : problème 4x4

Pour

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{12} & \alpha_2 & \beta_{23} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

La marche locale est

$$\begin{pmatrix} C_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ Q_1 & D_1 & E_{12} & E_{13} \\ Q_2 & E_{12} & D_2 & E_{23} \\ Q_3 & E_{13} & E_{23} & D_3 \end{pmatrix} \tag{69}$$

On a

$$C_0 = \|r_n\|_2^2 + \varepsilon^2(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) \tag{70}$$

,

$$Q_1 = \varepsilon(b_1^T r_n + d_1 g_1 + \beta_{12} g_3) \tag{71}$$

$$Q_2 = \varepsilon(b_2^T r_n + \beta_{12} g_1 + d_2 g_2 + \beta_{23} g_3) \tag{72}$$

$$Q_3 = \varepsilon(b_3^T r_n + \beta_{13} g_1 + \beta_{23} g_2 + d_3 g_3) \tag{73}$$

$$D_1 = \varepsilon^{2\|b_1\|_2^2} + d_1^2 + \beta_{12}^2 + \beta_{13}^2 \tag{74}$$

$$D_2 = \varepsilon^2\|b_2\|_2^2 + \beta_{12}^2 + d_2^2 + \beta_{23}^2 \tag{75}$$

$$D_3 = \varepsilon^2\|b_3\|_2^2 + \beta_{13}^2 + \beta_{23}^2 + d_3^2 \tag{76}$$

et

$$E_{12} = \varepsilon^2 b_1^T b_2 + \beta_{12}(d_1 + d_2) + \beta_{13}\beta_{23} \tag{77}$$

$$E_{13} = \varepsilon^2 b_1^T b_3 + \beta_{13}(d_1 + d_3) + \beta_{12}\beta_{23} \tag{78}$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

$$E_{23} = \varepsilon^2 b_1^T b_3 + \beta_{23}(d_2 + d_3) + \beta_{12}\beta_{23} \quad (79)$$

Ces termes sont exactement contenus dans la formule générale

$$\epsilon^2 B^T B + D^2$$

11.4 Convention unifiée des résidus et lise à jour de Rayleigh

Nous conservons, désormais, r_n pour le résidu final disponible au niveau n. si $z^* = (a^*(y^*)^T)^T$ minimise le problème local, on pose

$$u_{n+m} = \begin{pmatrix} a^* \hat{u}_n \\ y^* \end{pmatrix} \quad (80)$$

Le résidu intermédiaire, à valeur propre fixée $\hat{\lambda}_n$ est

$$\hat{r}_{n+m} = \left(A_{n+m} - \hat{\lambda}_n I\right) v_{n+m} = K_m z^* \quad (81)$$

Ainsi

$$\|\hat{r}_{n+m}\|_2 = \sigma_{min}(K_m) = \sqrt{\lambda_{min}(G_{m+1})} \quad (82)$$

Supposons, maintenant

$$\hat{\lambda}_n = \hat{u}_n^T A_n \hat{u}_n$$

La nouvelle valeur propre approchée est

$$\hat{\lambda}_{n+m} = (a^*)^2 \hat{\lambda}_n + 2a^* \epsilon g^T y^* + (y^*)^T C y^* \quad (83)$$

Le résidu final est

$$r_{n+m} = A_{n+m} u_{n+m} - \hat{\lambda}_{n+m} u_{n+m} \quad (84)$$

Si

$$\Delta\lambda = \hat{\lambda}_{n+m} - \hat{\lambda}_n$$

alors

$$r_{n+m} = \hat{r}_{n+m} - \Delta\lambda u_{n+m} \quad (85)$$

et

$$\boxed{\|r_{n+m}\|_2^2 = \lambda_{min}(G_{m+1}) - (\Delta\lambda)^2} \quad (86)$$

11.5. Séparation spectrale : hypothèse et certificat

Soit, maintenant

$$A_n u_n = \lambda_n u_n, \ \ \|u_n\|_2 = 1$$

Avec λ_n simple, définissons

$$\delta_n = dist\left(\lambda_n, (\delta(A_n) \setminus \{\lambda_n\}) U \sigma(C)\right) > 0 \quad (87)$$

et

$$\rho_n = |\varepsilon| \|B\|_2 \quad (88)$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

La perturbation hors diagonale

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon B \\ \varepsilon B^T & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifie $\|E\|_2 = \rho_n$

Proposition 11.2. (Certificat spectral par blocs)

Supposons

$(H1) A_n = A_n^T \ et \ C = C^T$;

$(H2) \lambda_n$ est simple dans A_n ;

$(H3) \delta_n > 0$;

$(H4) 2\rho_n < \delta_n$;

$(H5) \|u_{n+m}\|_2 = 1 \ et \ \hat{\lambda}_{n+m} = u_{n+m}^T A_{n+m} u_{n+m}$;

$(H6) g_{n+m} = \delta_n - \rho_n - \left|\hat{\lambda}_{n+m} - \lambda_n\right| > 0$

Alors la branche issue de λ_n reste isolée. Si u_{n+m} est le vecteur propre normalisée correspondant,

$$sin < (u_{n+m}, u_{n+m}) \leq \frac{\|r_{n+m}\|_2}{g_{-n+m}} \qquad (89)$$

En combinant (86) et (89)

$$sin < (u_{n+m}, u_{n+m}) \leq \frac{\sqrt{\lambda_{min}(G_{m+1}) - (\Delta\lambda)^2}}{g_{-n+m}} \qquad (90)$$

Il convient de distinguer $\Delta\lambda = \hat{\lambda}_{n+m} - \hat{\lambda}_n$, utilisé dans l'identité du résidu de $\left|\hat{\lambda}_{n+m} - \lambda_n\right|$, utilisé dans la séparation spectrale.

11.6. Propagation de l'erreur angulaire

Définissons

$$e_n = sin < (\hat{u}_n , u_n) \qquad (91)$$

et

$$\Gamma_n = max_{\mu \epsilon \sigma(A_n)} |\mu - \lambda_n| \qquad (92)$$

Si $\hat{\lambda}_n$ est le quotient de Raleigh de $\hat{u}_n$, alors

$$\left|\hat{\lambda}_n - \lambda_n\right| \leq \Gamma_n e_n^2, \ \ \|r_n\|_2 \leq \Gamma_n e_n \qquad (93)$$

Le vecteur admissible $z_0 = (1, 0, \dots 0)^T$ donne

$$\|\hat{r}_{n+m}\|_2^2 \leq \|r_n\|_2^2 + \rho_n^2$$

Ainsi

En particulier

$$\boxed{e_{n+m} \leq \frac{\sqrt{\Gamma_n^2 e_n^2 + \rho_n^2}}{g_{-n+m}}} \qquad (94)$$

$$e_{n+m} \leq K_n e_n + \beta_n, \ \ K_n = \frac{\Gamma_n}{g_{-n+m}}, \ \ \beta_n = \frac{\rho_n}{g_{-n+m}} \qquad (95)$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

11.6. Convergence sous bordages successifs

Considérons une suite $N_{j+1} = N_j + m_j$ et

$$A_{N_{j+1}} = \begin{pmatrix} A_{N_j} & \varepsilon_j B_j \\ \varepsilon_j B_j^T & C_j \end{pmatrix}$$

Si

$$e_{j+1} \leq k_j e_j + B_j,$$

alors pour tout $j \geq 1$,

$$\boxed{e_j \leq \left(\prod_{j=1}^{j-1} k_j\right) e_g + \sum_{k=0}^{j-1} \left(\prod_{j=k+1}^{j-1} k_j\right) B_k} \quad (96)$$

Si $k_j \leq k < 1 \;\; et \; \beta_j \leq \beta$, alor

$$e_j \leq k^j e_0 + \beta \frac{1-k^j}{1-K}, \;\; \lim sup_{j\to\infty} e_j \leq \frac{\beta}{1-K} \quad (97)$$

Si de plus, $\beta_{j\to 0}$, alors

$$\boxed{e_j = 0} \quad (98)$$

11.8. Régime non résonnant par blocs et récurrence à tout ordre

Supposons, désormais, une paire exacte

$$Au = \lambda u, \quad \|u\|_2 = 1^*$$

et

$$\lambda \notin \sigma(C)$$

Posons

$$D = C - \lambda I_m, \quad S = D^{-1}, \quad g = B^T u, \quad P = 1 - uu^T$$

ainsi que

$$R = [(A - \lambda I)_u]^{-1}$$

La symétrie $A(-\varepsilon) = diag(I, -I)A(\varepsilon)diag(I, -I)$ impose

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda + \sum_{p\geq 1} \varepsilon^{2p} \lambda_{2p} \quad (99)$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

$$x(\varepsilon) = u + \sum_{p\geq 1} \varepsilon^{2p}\omega_{2p} \tag{100}$$

$$y(\varepsilon) = \sum_{p\geq 0} \varepsilon^{2p+1} y_{2p+1} \tag{101}$$

avec la normalisation intermédiaire $u^T\omega_{2p} = 0$, l'initialisation est

$$y_1 = -Sg \tag{102}$$

Pour $p \geq 1$

$$\boxed{\lambda_{2p} = g^T y_{2p-1}} \tag{103}$$

et

$$\boxed{\omega_{2p} = R\left[\sum_{j=1}^{p-1} \lambda_{2j}\omega_{2(p-j)} - PBy_{2p-1}\right]} \tag{104}$$

Les premiers coefficients sont

$$\boxed{y_{2p+1} = S\left[\sum_{j=1}^{p} \lambda_{2j} y_{2(p-j)+1} - B^T\omega_{2p}\right]} \tag{105}$$

$$\lambda_2 = -g^T Sg, \quad \omega_2 = RPBS_g \tag{106}$$

En posant

$$T = B^T RPB, \quad a = g^T S_g$$

On obtient

$$y_3 = aS^2 g - STS_g \tag{107}$$

Et

$$\boxed{\lambda_4 = (g^T Sg)(g^T S^2 g) - g^T STS_g} \tag{108}$$

Ainsi

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda - \varepsilon^2 g^T Sg + \varepsilon^4\left[(g^T Sg)(g^T S^2 g) - g^T STS_g\right] + 0(\varepsilon^6) \tag{109}$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

11.9. Equation exacte de branche, point fixe et Newton

Ecrivons

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda + 2$$

Sur u^1 posons

$$R_A(z) = [(A - \lambda I)|u^1 - zI]^{-1}$$

$$T(z) = B^T R_A(z) PB \qquad (110)$$

et

$$M(z, \varepsilon) = D = zI_n - \varepsilon^2 T(z) \qquad (111)$$

Sous $u^T x = 1$

$$y = -\varepsilon M(z, \varepsilon)^{-1} g \qquad (112)$$

$$x = u + \varepsilon^2 R_A(z) PBM(z, \varepsilon)^{-1} g \qquad (113)$$

La branche exacte satisfait

$$\boxed{\Phi(z) = z + \varepsilon^2 g^T M(z, \varepsilon)^{-1} g = 0} \qquad (114)$$

Elle peut être écrite $z = F(z)$ avec

$$F(z) = -\varepsilon^2 g^T M(z, \varepsilon)^{-1} g \qquad (115)$$

Soient

$$\gamma_A = dist(\lambda, \sigma(A) \backslash \{\lambda\}), \quad \delta_C = dist\big(\lambda, \sigma(C)\big)$$

Pour $0 < r < min(\gamma_A, \delta_C)$ posons

$$m_r = \delta_C - r - \varepsilon^2 \frac{\|B\|_2^2}{\gamma_A - T} \qquad (116)$$

Si $m, > 0, \varepsilon^2 \|g\|_2^2 / m_r, \leq r$ et

$$q_r = \frac{\varepsilon^2 \|g\|_2^2}{m_1^2} \left[1 + \varepsilon^2 \frac{\|B\|_2^2}{(\gamma_A - r)^2}\right] < 1 \qquad (117)$$

alors F est contractante sur $[-r, r]$. De plus

$$\Phi'(z) = 1 + \varepsilon^2 g^T M^{-1} \big(I_m + \varepsilon^2 T'(z)\big) M^{-1} g \geq 1 \qquad (118)$$

Sur tout intervalle réel, sans pôle, la racine y est donc unique et Newton,

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} - \frac{\Phi(z^{(k)})}{\Phi\prime(z^{(k)})} \qquad (119)$$

Converge quadratiquement au voisinage de la racine simple.

11.10. Régime résonnant général

Supposons maintenant

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

$$\lambda \epsilon \sigma(C)$$

Soit

$$E_C = ker(C - \lambda I_m), \quad dim E_C = r \geq 1$$

et soit $Q \in \mathbb{R}^{m \times T}$ une base orthonormale de E_C. Posons

$$h = Q^T B^T u, \quad G = \|h\|_2 \tag{120}$$

Résonnance couplée : G>0. Définissons

$$p = \frac{Qh}{G}$$

La restriction de la perturbation du premier ordre, au sous-espace, dégénéré span $\{u\} \oplus E_C$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & h^T \\ h & 0 \end{pmatrix}$$

Elle possède les valeurs propres $+G, -G$ et 0 de multiplicité $r - 1$. Deux branches principales satisfont donc

$$\boxed{\lambda_{\pm}(\varepsilon) = \lambda \pm \varepsilon G + 0(\varepsilon^2)} \tag{121}$$

Les vecteurs limites correspondant sont

$$\phi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u \\ \pm p \end{pmatrix}$$

Définissons l'inverse réduit

$$R_A = [(A - \lambda I)|u^1]^{-1}$$

et l'inverse réduit S_C de $C - \lambda I$ sur E_C, prolongé p ar zéro sur E_C. Avec

$$g_1 = (1 - QQ^T)B^T u$$

Le coefficient d'ordre deux, commun aux deux branches principales est

Ainsi

$$\boxed{\lambda_2^{res} = \frac{1}{2}\left[(PB_P)^T R_A (PB_P) + g_1^T S_g g_1\right]} \tag{122}$$

$$\boxed{\lambda_{\pm}(\varepsilon) = \lambda \pm \varepsilon G + \varepsilon^2 \lambda_2^{res} + 0(\varepsilon^3)} \tag{123}$$

Si r<1, les r-1 directions résonnantes orthogonales à p n'ont pas de déplacement de premier ordre. Si W est une base orthonormale de $E_C \cap p^1$, leurs coefficients d'ordre deux sont les valeurs propres de

$$\boxed{-W^T B^T R_A P B W} \tag{124}$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

Résonnance sans couplage direct : G=0. L'opérateur effectif d'ordre deux sur span $\{u\}\oplus E_C$ est blos diagonal :

$$H_2 = \begin{pmatrix} -g^T S_C g & 0 \\ 0 & -Q^T B^T R_A P B Q \end{pmatrix}, \quad g = B^T u \tag{125}$$

La branche issue de u vérifie

$$\lambda_A(\varepsilon) = \lambda - \varepsilon^2 g^T S_C g + +0(\varepsilon^2) \tag{126}$$

et les branches issues de E_C sont gouvernés par les valeurs propres de $-Q^T B^T R_A P B Q$

Enfin, si

$$B^T u = 0 \tag{127}$$

alors

$$A(\varepsilon)\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} pour\ tout\ \varepsilon \tag{128}$$

et la branche est exactement conservée.

11.11. Coût algorithmique par blocs

Si $(\hat{\lambda}_u, \hat{u}_u, r_u)$ est stocké, le calcul de $B^T\hat{u}_u$ et $B^T r_u$ coûte $0(nm)$, la formation de $B^T B$ coûte $0(nm^2)$ et la diagonalisation de G_{m+1} coûte $0(m^3)$. Le coût total d'une correction locale d'une paire propre est donc

$$0(nm^2 + m^3) \tag{129}$$

Pour m fixé, indépendamment de n, ce coût est linéaire en n. Le nouveau résidu peut être mis à jour sans remultiplier par A_n :

$$r_{n+m} = \begin{pmatrix} a^* r_n + \varepsilon B g^* + a^*(\hat{\lambda}_n - \hat{\lambda}_{n+m})\hat{u}_n \\ a^* \varepsilon g + (C - \hat{\lambda}_{n+m} I) g^* \end{pmatrix} \tag{130}$$

11.12. Vérifications numériques de la généralisation par blocs

Des tests indépendants ont été réalisés pour m=3. La formule explicite (58) et le produit direct $K_m^T = K_m$ coïncident à une erreur de l'ordre de 10^{-1} . L'identité (86) est également vérifiée à la précision machine. Dans un exemple, non résonnant, les pentes numériques de l'erreur sur la valeur propre sont proches de 4 pour le développement limité à ε^2 et de 6 après ajout du terme ε^4.

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

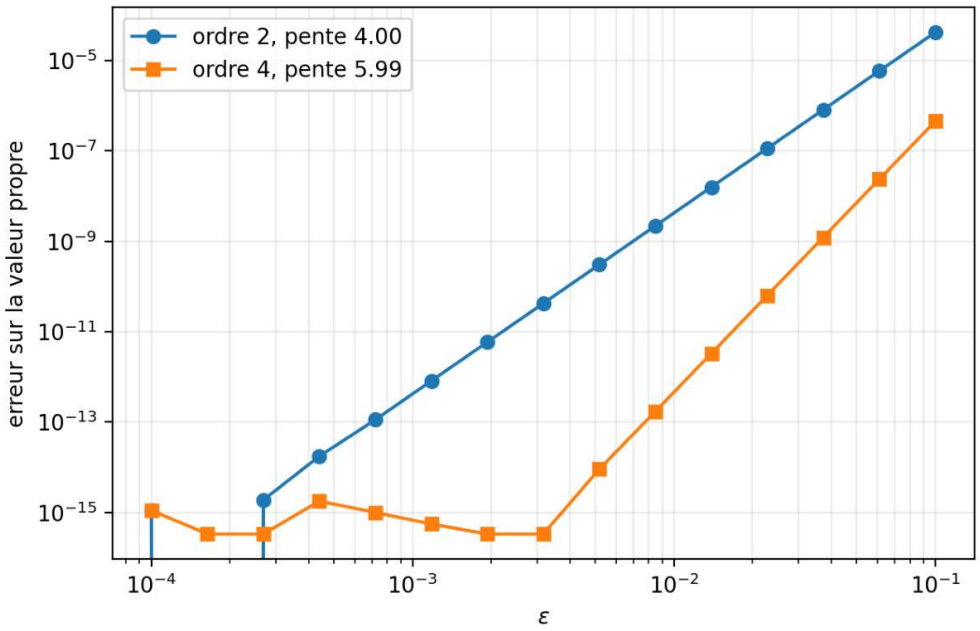


Figure 3 – Bordage par bloc : ordres observés pour la valeur propre.

Les normes des résidus des approximations successives présentes des pentes proches de 2, 3 et 4.

Dans un exemple résonnant de multiplicité deux avec $G > 0$, après retrait des termes d'ordre un et deux, le reste des deux branches principales est d'ordre trois. La substitution des valeurs propres calculées directement dans l'équation exacte (114) donne des résidus scalaires de l'ordre de 10^{-15}.

12. Discussion

Les éléments suivants sont classiques pris isolément : le bordage symétrique, la transformation en matrice flèche, l'équation séculaire, les mises à jour QR, la théorie de perturbation des valeurs propres et l'emploi de Newton sur une équation scalaire.

Le noyau spécifique de la construction présentée ici est la procédure locale suivie qui utilise, directement, une paire propre approchée et son résidu.

Le problème 2X2 n'est que le cas m=1 : pour un bordage par m nouvelles coordonnées, la correction se réduit à un problème spectral $(m + 1) \times (m + 1)$, avec mise à jour du résidu, certificat spectral, propagation de l'erreur et analyse asymptotique cohérente. Pour un bloc de taille fixée, le coût reste linéaire en la grande dimension n.

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

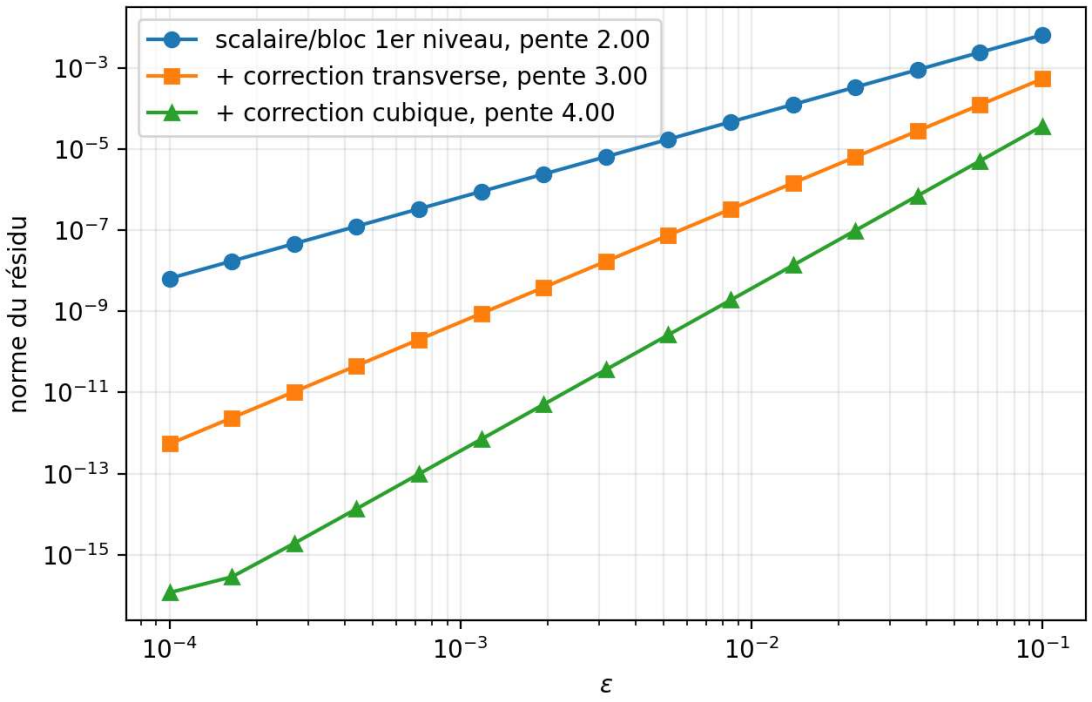


Figure 4. Bordage par bloc : ordres observés pour le résidu.

Le cadre théorique principal suppose une valeur simple de A_K. Le cas où λ_k possède une multiplicité supérieure à un, n'est pas traité ici : il nécessiterait le suivi d'un sous-espace invariant plutôt que d'une seule direction propre.

13. Conclusion

Nous avons établi une procédure de correction récursive d'une paire propre pour des matrices réelles symétriques emboîtées sous bordage par blocs. Le cas scalaire est un problème local 2X2 ; l'ajout simultané de m nouvelles coordonnées conduit exactement à un problème spectral local $(m+1)\times(m+1)$ gouverné par la matrice de Gram $G_{m+1} = K_m^T J K_m$.

La norme du résidu intermédiaire minimal est $\sigma_{min}(K_m) = \sqrt{\lambda_{min}(\sigma_{m+1})}$.

Après quotient de Rayleigh, le résidu final satisfait une identité exacte. Sous séparation spectrale, ce résidu fournit un certificat d'erreur angulaire. La propagation d'une étape à la suivante conduit à une récurrence affine qui permet d'établir une convergence globale sous contraction uniforme et couplages asymptotiquement faibles.

Dans le régime non résonnant, le résolvant matriciel $(C-\lambda I)^{-1}$ remplace le dénominateur scalaire du bordage à une coordonnée. Nous avons obtenu une récurrence à tout ordre, le coefficient quartique de la valeur propre, une équation exacte de branche, des conditions de contraction et une formulation de Newton.

Dans le régime non résonnant, l'espace propre de C, associé λ conduit à une classification complète au premier ordre non nul : deux branches principales peuvent se séparer linéairement, les directions résonnantes restantes apparaissent à l'ordre deux, et une branche est exactement conservée lorsque $B^T = 0$.

Les vérifications numériques confirment les identités de Gram et de résidu à la précision machine ainsi que les ordres asymptotiques prédits.

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 59 No. 2 October 2026, pp. 669-688

Dans le cadre retenu - matrices réelles symétriques, valeur propre simple de la matrice initiale et bordage symétrique par bloc arbitraire - la construction est ainsi fermée.

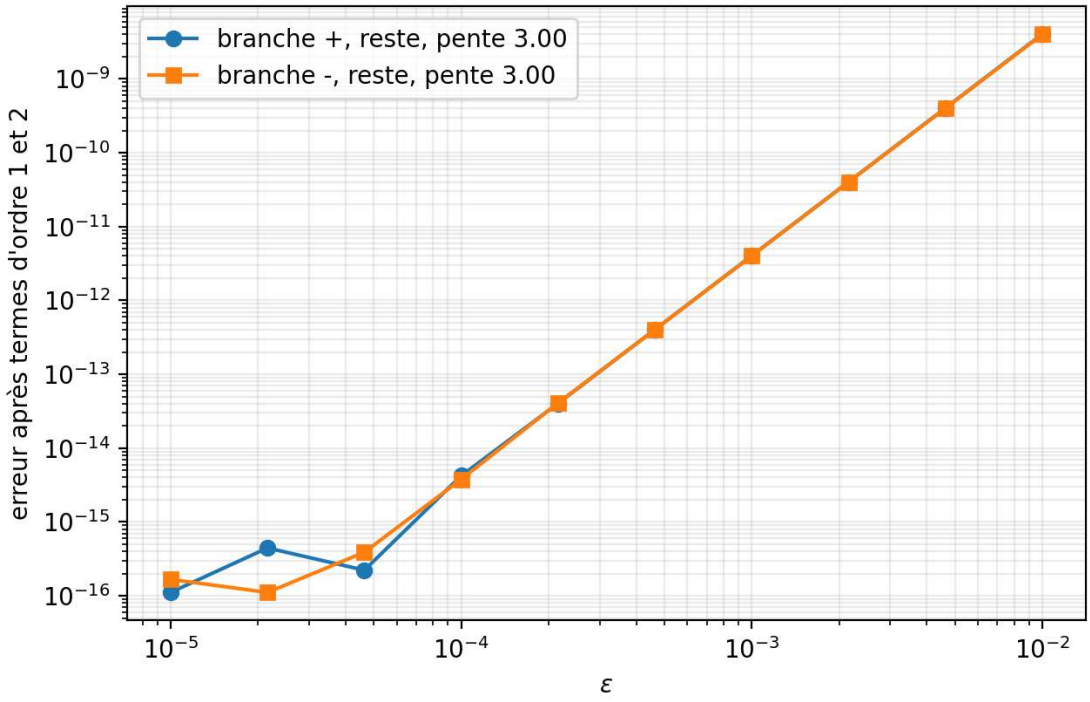


Figure 5. Bordage par bloc résonnant : reste après les termes d'ordre un et deux.

Valeur propres multiples de A_n, les matrices non symétriques et les problèmes rectangulaires de valeurs singulières constituent des extensions distinctes.

RÉFÉRENCES

[1] G,H Golub and C.F Van Loan, Matrix Compulations, 4th ed., Johns Hopkins University Pres, 2013

[2] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operations, Springer

[3]G.W. Steward, Matrix Algorithms , Vol II : Eigensystems, SIAM

[4] B.N Parlett, The Symmetric Eigenvalue Probem, SIAM

[5] J.R. Bunch, C.P Nielse, and D.C Sorensen. « Rank-One Modification of the Symmetric Eigenproblem. « Numerische Mathematik. 31, 1978.

[6] M. Gu and S.C Eisenslat, « A Stable and Efficient Algorithm for the Rank-One Modification of the Symmetric Eigenproblem. » SIAM Journal on Matrix Analysis and applications, 15, 1994.

[7] C. Davis and W.M. Kahan. « The Rotation of Eigenvectors by a Perturbation. III. SIAM Journal on Numerical Analysis, 7. 1970

[8] N.J Highan, Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, 2nd ed. SIAM 2002.