

Evaluation Des Paramètres De Performance Du Système D'attente Markovien M/M/1 En Régime Transitoire En Informatique

[Evaluation Of Performance Parameters Of The M/M/1 Markovian Queueing System In Transient Regime In Computer Science]

DJONGA ALONGE Henri¹ ; MPUTSHU BONYOMA Francis² ; LOMEMBE OMOKOKO Marc¹ ; BONGOYO EOMA ENOKA Boniface³ ; LOBENGO MOSENGA Benjamin² ; MONGINDA NGUNDU Davin², SENGALOWO Apollinaire¹ ; BOKELE W'EKOFODieumer² ; DIKOHONONOMBA Louise⁴

¹ Université de Lodja

² Institut Supérieur Pédagogique de Mbandaka

³ Institut Supérieur de Commerces de Boende

⁴ Institut Supérieur de Commerces de Lodja



Résumé : La problématique abordée dans cet article scientifique consiste à déterminer les formules mathématiques des probabilités d'état ainsi que des paramètres de performance du système d'attente markovien M/M/1 en régime transitoire, en utilisant la méthode de la transformée de Laplace. Un exemple illustratif est présenté afin de concrétiser et valider les résultats obtenus.

Mots-clés : Paramètres de performance ; système d'attente markovien ; régime transitoire ; transformée de Laplace ; probabilités d'état.

Abstract: The issue addressed in this scientific article consists in determining the mathematical expressions of the state probabilities as well as the performance parameters of the M/M/1 Markovian queueing system in the transient regime, using the Laplace transform method. An illustrative example is presented in order to concretize and validate the obtained results.

Keywords: Performance parameters; Markovian queueing system; Transient regime; Laplace transform; State probabilities.

I. INTRODUCTION

De nos jours, à mesure que les sociétés s'urbanisent, se développent et se modernisent, le problème des files d'attente se pose avec une acuité croissante dans plusieurs secteurs de la vie quotidienne, notamment dans le domaine de la communication.

Les files d'attente occupent une place essentielle dans la gestion des systèmes de communication, car elles interviennent dans la résolution de nombreux problèmes liés au traitement des demandes, quelle que soit la distance. Ainsi, le

monde actuel est en quête d'une meilleure qualité de service et d'une performance optimale des systèmes d'attente afin d'améliorer la gestion des communications.

En ce qui concerne les performances des systèmes d'attente, Baynat (2000, p. 232) souligne qu'il est inconcevable de concevoir un système d'attente sans procéder préalablement à une analyse de ses performances. En conséquence, cette analyse suppose la connaissance des principales mesures de performance, telles que le nombre moyen de clients (ou d'appels), ainsi que les temps moyens d'attente dans la file et dans le système. Dans cet article scientifique, nous nous proposons de déterminer les paramètres de performance du système d'attente markovien M/M/1 en régime transitoire, où ces paramètres sont des fonctions dépendant du temps, contrairement au régime permanent dans lequel ils sont des constantes.

Plusieurs chercheurs en recherche opérationnelle, notamment Chandrasekaran et al. (2012, pp. 606–607), Agnès Lagnaux (2013, p. 137), Ycart (2010, p. 132), Sharma et al., ainsi que Al-Seedy et al. (2009, p. 1280), soulignent dans la littérature que les formules mathématiques des probabilités d'état du système d'attente markovien M/M/1 en régime transitoire sont généralement complexes et difficiles à exploiter pour le calcul des mesures de performance correspondantes. Ils relèvent également que le calcul de ces paramètres en régime transitoire s'avère souvent pénible, voire délicat.

Ainsi, la contribution originale de cet article consiste à établir les expressions mathématiques des probabilités d'état $P_n(t)$, pour $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, ainsi que celles des paramètres de performance du modèle d'attente M/M/1 en régime transitoire.

Pour atteindre cet objectif, le travail est structuré comme suit : la section 2 présente le modèle d'attente M/M/1 ; la section 3 expose la méthodologie de recherche ; la section 4 est consacrée à la détermination des probabilités d'état à l'aide de la méthode de la transformée de Laplace ; la section 5 traite du calcul des paramètres de performance du système en régime transitoire ; la section 6 présente un exemple illustratif en lien avec le modèle étudié ; enfin, la section 7 propose la conclusion générale du travail.

1. Présentation du modèle d'attente M/M/1

1.1. Définition

Le système d'attente M/M/1 est un modèle classique de la théorie des files d'attente. Il s'agit d'un processus stochastique markovien décrivant l'évolution du nombre de clients dans un système comportant un seul serveur, avec des arrivées et des services suivant des lois exponentielles.

Se déroulant en PVM (processus de Vie et de Mort) homogène de taux de naissance et décès définis respectivement par :

$$\begin{cases} \lambda_n = \lambda, \lambda > 0 \\ \mu_n = \begin{cases} \mu, & \text{si } n > 0 \\ 0, & \text{si } n = 0 \end{cases} \end{cases}$$

1.2. Hypothèses (ou caractéristiques) du modèle

- Les arrivées suivant une loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$;
- Les durées de services suivent une exponentielle négative de paramètre $\mu > 0$;
- Le système à un seul serveur ;
- La capacité de la salle d'attente et du système est infinie (système ouvert) ;
- La discipline de service FIFO.

II. METHODES ET TECHNIQUES UTILISEES

Pour atteindre les résultats visés dans cet article scientifique, nous avons privilégié la **méthode d'analyse de contenu**, également appelée **méthode analytique**, en suivant ses différentes étapes (cf. Cimbela K., 2018, p. 77 ; Mukeba K., 2016, p. 246).

Cette méthode nous a permis d'identifier les connaissances déjà établies dans la littérature ainsi que les aspects encore peu ou non explorés en lien avec notre thème de recherche. Les éléments non encore abordés ont ainsi constitué le point de départ de notre contribution originale.

Les principales étapes de cette démarche méthodologique se sont déroulées comme suit :

- Sélection de documents textuels et scientifiques pertinents (articles, actes de séminaires, ouvrages spécialisés, etc.), consultés avec ou sans recours à Internet ;
- Lecture approfondie et analyse critique du contenu des documents retenus ;
- Classification et consignation des informations pertinentes en rapport avec le thème de recherche ;
- Interprétation des données recueillies au cours de la lecture et de leur organisation thématique.

Cette approche nous a conduits à identifier la méthode la plus appropriée pour le calcul des probabilités d'état et des paramètres de performance du système d'attente M/M/1 en régime transitoire (RT), à savoir la méthode des transformées de Laplace.

I. CALCUL DES PROBABILITES D'ETAT

$p_n^{(t)}$ du modèle à processus de naissance – mort homogène de paramètres $\lambda_n \lambda > 0$ et $\mu_n \mu > 0$.

Le système d'équation différentielle de Kolmogorov est le suivant : (I)

$$(I) \begin{cases} p_n'^{(t)} = \lambda_{n-1} p_{n-1}^{(t)} - (\lambda_n + \mu_n) p_n^{(t)} + \mu_{n+1} p_{n+1}^{(t)}, n \geq 1 \\ p_0'^{(t)} = -\lambda_0 p_0^{(t)} + \mu_1 p_1^{(t)} \end{cases}$$

En remplaçant λ_n par λ et μ_n par μ , le système (I) s'écrit :

$$(I') \begin{cases} p_n'^{(t)} = \lambda p_{n-1}^{(t)} - (\lambda + \mu) p_n^{(t)} + \mu p_{n+1}^{(t)}, & n \geq 1 \\ p_0'^{(t)} = -\lambda p_0^{(t)} + \mu p_1^{(t)} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$(4.2)$$

Pour obtenir les probabilités d'état

$p_n^{(t)}$, solution du système (I'), nous utilisons la méthode de la transformée de Laplace de la

Manière suivante :

- Méthode de la transformée de Laplace (T.L)

D'après Alonge O.J [2020, P.54], , Hormiere, P. J [2016, P. 22] et Piskounov, N [1980, P. 610], on sait que :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(p_n'^{(t)}) = s p_n^* - p_n^{(o)}, n \geq 0 \text{ et } s > 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(p_n'^{(t)}) = p_n^* s \end{cases} \quad (4.4)$$

La condition initiale $p_n^{(o)} = 0$ si $x \neq 0$ [cfr Mabela M, R][8] et Many, N. L [2014, P.134] ainsi en remplaçant les $p_n^{(t)}$ par leurs transformées de la Laplace de (4.3) et (4.1) et (4.2) s'écrivent :

$$\begin{cases} s p_n^* s - p_n^{(o)}, \lambda s p_{n-1}^*(s) - (\lambda + \mu) p_n^*(s) + \mu p_{n+1}^*(s), \forall n \geq 1 \text{ et } s > 0 \\ s p_n^{(t)}(s) = -s p_o^* = -\lambda s p_o^* s + \mu p_1^*(s) \end{cases} \quad (4.4)$$

$p_n^{(o)} = 0$ si $n \neq 0$ et $p_0^{(o)} = 1$ (si $n = 0$) sont les conditions initiales (c.i.) [cfr Mabela, M R [2019, P. 115]]

Etape 1. Détermination de l'équipement caractéristique et de la solution générale associées à tenant compte de ces c.i., le système précédent devient : 4.5

$$\begin{cases} s p_n^* s = \lambda s p_{n-1}^*(s) - (\lambda + \mu) p_n^*(s) + \mu p_{n+1}^*(s), \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$s p_o^*(s) = -\lambda s p_o^*(s) + \mu p_1^*(s) + 1 \quad (4.6)$$

D'après Ycart, B. [2010, P.132], et Chandrasekharan, V.M et cie [5],

Les $p_n^*(s)$ sont donc solution de l'équation. ainsi :

$$(s + \lambda + \mu) p_n^*(s) = \lambda s p_{n-1}^*(s) + \mu p_{n+1}^*(s) \quad (4.7)$$

De (4.7), on obtient :

$$(s + \lambda + \mu) = \frac{\lambda s p_{n-1}^*(s)}{p_n^*(s)} + \lambda \frac{p_{n-1}^*(s)}{p_n^*(s)}$$

$$\lambda \frac{p_{n-1}^*(s)}{p_n^*(s)} = (s + \lambda + \mu) - \mu \frac{p_{n+1}^*(s)}{p_n^*(s)}$$

$$\frac{p_n^*(s)}{p_{n-1}^*(s)} = \frac{\lambda}{s + \lambda + \mu - \mu \frac{p_{n+1}^*(s)}{p_n^*(s)}}$$

$$\text{Parsons } k(s) = \frac{p_{n-1}^*(s)}{p_{n-(i+1)}^*(s)}, (i=0,1)$$

D'où, les équations caractéristique associée à (4.5) est d'après Ycart, B. [13], p. 86 :

$$\mu k^2 - (s + \lambda + \mu) k + \lambda = 0 \quad (4.8)$$

Les racines de (4.8) sont:

$$\begin{cases} \alpha(s) = \frac{1}{2\mu} [s + \lambda + \mu + \sqrt{(s + \lambda + \mu)^2 - 42\mu}] \\ \beta(s) = \frac{1}{2\mu} [s + \lambda + \mu - \sqrt{(s + \lambda + \mu)^2 - 42\mu}] \end{cases}$$

La solution générale de l'équation (4.5) est selon Ycart, B. [13], P. 86 :

$$P_n^*(s) = A(s) (\alpha(s))^n + B(s) (\beta(s))^n \quad (4.9)$$

Remarquer que $0 < \beta(s) < 1 < \alpha(s)$ pour $s > 0$. Ainsi, $\alpha(s)$ est une racine à rejeter puisque $\alpha(s) \notin [0,1]$ et gardons $\beta(s)$.

Etape 2 recherche de la solution particulière de (4.5)

Par linéarité de la transformation particulière, $\sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(t)} = 1$ entraîne

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(t)} = \frac{1}{s} \quad s > 0.$$

la série $\sum_{n=1}^{\infty} P_n^*(s)$ est convergente, $A(s)$ de (4.9) est nécessairement

nul. d'où, la condition $\sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(t)} = \frac{1}{s}$ donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} [B(s)(\beta(s))^n] = \frac{B(s)}{1-\beta(s)} \Rightarrow \frac{1}{s} = \frac{B(s)}{1-\beta(s)} \Rightarrow B(s) = \frac{1}{s}(1 - \beta(s)) \quad (4.10)$$

Tenant compte de (4.10) (4.9) devient :

$$P_n^{*(s)} = \frac{1}{s}(1 - \beta(s)(\beta(s))^n)$$

Qui est la solution particulière cherchée de (4.5)

Etape 3. Ecrire de $P_n^{*(s)}$ en termes de la sommes d'une serie géométrie.

Noter d'abord que :

$$\begin{cases} \beta(s) = \frac{1}{2\mu} [s + \lambda + \mu - \sqrt{(s + \lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu}] \\ \beta'(s) = \frac{1}{2\mu} [1 - (s + \lambda + \mu) \cdot \frac{1}{\sqrt{(s + \lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu}}] \end{cases} \quad -1/2$$

Dans notre travail, nous négligeons les dérivées d'ordre supérieur ou égal à 2 qui constituèrent une autre préoccupation de recherche.

Ultérieure, c'est dire $\beta^{(x)}(s) = 0, \forall x \geq 2$ pour $s = 0$, on a :

$$\beta(0) = \frac{1}{2\mu} (\lambda + \mu - \lambda - \mu) = \begin{cases} 1, \text{ si } \lambda \geq \mu \\ \frac{\lambda}{\mu}, \text{ si } \lambda < \mu \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\beta'(0) = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda + \mu}, \text{ si } \lambda \geq \mu \\ \frac{\lambda}{\mu}, \left(\frac{1}{\lambda - \mu}\right) \text{ si } \lambda < \mu \end{cases} \quad (4.13)$$

Le cas $\lambda \geq \mu$ (saturation ou explosion) est à déconsidérer, et seul le cas $\lambda < \mu$ (équilibre ou stabilité) sera considéré dans ce travail ainsi de, on peut écrire:

$$P_n^*(s) = \frac{1}{s} [(\beta(s))^n - (\beta(s))^{n+1}]$$

Et de (4.14) ; posons :

$$f(s) = (\beta(s))^n \text{ et } g(s) = (\beta(s))^{n+1} \quad n \geq 1$$

En développant $f(s)$ et $g(s)$ en series entiers de s ou paint $s = 0$, on aura:

$$i) \quad f(s) = (\beta(s))^n$$

- $f'(s) = n(\beta(s))^{n-1}(\beta'(s))$
- $f''(s) = n(n-1)(\beta(s))^{n-2}(\beta'(s))^2$
- $f'''(s) = n(n-1)(n-2)(\beta(s))^{n-3}(\beta'(s))^3$
- $f^{(x)}(s) = n! (\beta(s))^{n-x} \cdot (\beta'(s))^x$

Pour $s=0$, on aura :

$$f^{(x)}(0) = n! (\beta(0))^{n-x} \cdot (\beta'(0))^x$$

$$= n! \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{\lambda - \mu}\right)^x, n \geq 1 \text{ et } x \geq 0$$

D'où :

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(\frac{1}{\lambda-\mu}\right)^x \frac{s^x}{x!} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left[\frac{\lambda-\mu}{(\lambda-\mu)-s} \right] ; \left| \frac{s}{\lambda-\mu} \right| < 1, (4.15)$$

$$ii) g(x) = (\beta(s))^{n+1}$$

- $g'(s) = (n-1)(\beta(s))^n \cdot (\beta'(s))$
- $g''(s) = (n+1)n(\beta(s))^{n-1} \cdot (\beta'(s))^2$
- $g'''(s) = (n+1)n(n-1)(\beta(s))^{n-2} \cdot (\beta'(s))^3$

$$g^{(x+1)} = (n+1)! (\beta(s))^{n-x} \cdot (\beta'(s))^{x+1}$$

Pour $s=0$, on a :

$$f^{(x+1)}(0) = (n+1)! \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n+1} \left(\frac{1}{\lambda-\mu} \right)^{x+1} \quad \lambda < \mu$$

D'où :

$$\begin{aligned} g(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{\lambda-\mu}\right)^{x+1} \frac{s^{x+1}}{(x+1)!} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda-\mu}\right)^{x+1} \frac{s^{x+1}}{(x+1)!} \quad \left| \frac{s}{\lambda-\mu} \right| < 1 \\ &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} \left(\frac{\mu-\lambda}{s-(\lambda-\mu)} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

De (4.15) et (4.16), $P_n^*(s)$ de (4.14) peut s'écrire:

$$\begin{aligned} P_n^*(s) &= \frac{1}{s} (f(s) - g(s)) \quad , \quad s > 0 \\ &= \frac{1}{s} \left\{ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left[\frac{\mu-\lambda}{s-(\lambda-\mu)} \right] + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} \left[\frac{\mu-\lambda}{s-(\lambda-\mu)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Où (4.17) est bien l'expression de $P_n^*(s)$ en termes de sommes des séries géométriques.

Etape 4 : Invention de $P_n^*(s)$ à $P_n'(s)$ et détermination de la solution $P_n^{*(t)}$ de (4.5)

Selon (4.3), on a :

$$\mathcal{L}(P_n'(t)) = sP_n^*(s) \Rightarrow P_n'(t) \mathcal{L}^{-1}(sP_n^*(s)), \quad n \geq 1 \quad (4.18);$$

Et de (4.18), on a q :

$$\begin{aligned} P_n'(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left[\frac{\mu-\lambda}{s-(\lambda-\mu)} \right] + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} \left[\frac{\mu-\lambda}{s-(\lambda-\mu)} \right] \right\} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (\lambda-\mu) e^{-(\mu-\lambda)t} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} (\lambda-\mu) e^{-(\mu-\lambda)t} \quad (cfr) [\quad], p. 11 et [\quad], pp. 1-5 \end{aligned}$$

Or, on sait que :

$$\begin{aligned} P_n^{(t)} &= \int_0^t P_n'(v) dv + c \\ &= \int_0^t \left[-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (\lambda-\mu) e^{-(\mu-\lambda)v} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} (\lambda-\mu) e^{-(\mu-\lambda)v} \right] dv + c \\ &= -\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (\lambda-\mu) \int_0^t e^{-(\mu-\lambda)v} dv + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} (\lambda-\mu) \int_0^t e^{-(\mu-\lambda)v} dv + c \end{aligned}$$

Poson $k = -(\mu - \lambda)v \Rightarrow dk = -(\mu - \lambda)dv$, et on a :

$$P_n^{(t)} = -\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-(\mu-\lambda)t} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} e^{-(\mu-\lambda)t} + C' \quad (4.19)$$

A partir de la condition initiale (c.i) $P_n^{(0)} = 0 \forall n \geq 1$ déterminons la constante c' dans (4.19):

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} C \Rightarrow C = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} \\ \Rightarrow C &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Donc (4.20) dans (4.19) donne :

$$P_n^{(t)} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) (1 - e^{-(\mu-\lambda)t}), \quad \forall n \geq 1 \quad (4.21)$$

Et pour $n=0$, on a :

$$P_0^{(t)} = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) (1 - e^{-(\mu-\lambda)t}) \quad (4.22)$$

II. CALCUL DES MESURES PERFORMANCE DU SYSTEME D'ATTENTE MIMI1 MARKOVIEEN EN REGIME TRANSITOIRE RT

Dans cette section, nous allons pencher à calculer les paramètres de performance du modèle d'attente MIMI1 en utilisant les probabilités d'état de (4.21) ces paramètres (on mesure) de performance sont :

- Le nombre moyen des clients dans la file et dans le système à un instant t notés respectivement $\bar{N}(t)$ et $\bar{N}_s(t)$.
- Le temps moyen d'attente des clients dans la file et dans le système pendant un instant t noté respectivement $\bar{T}_f(t)$ et $\bar{T}_s(t)$

a. Nombre moyen de client dans le système à une date t

$$\begin{aligned} \bar{N}_s(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n^{(t)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) (1 - e^{-(\mu-\lambda)t}), \\ &= (1-s)(1-e^x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} n s^n\right) \text{ avec } s = \frac{\lambda}{\mu} \text{ et } x = -(\mu-\lambda)t \\ &= s(1-s)(1-e^x) \sum_{n=0}^{\infty} n s^{n-1} \\ &= s(1-s)(1-e^x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n\right)' \\ &= s(1-s)(1-e^x) \left(\frac{1}{1-s}\right)' \left(\text{car } \sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{1}{1-s}\right) \\ &= (1-s)(1-e^x) \left[\frac{1}{(1-s)^2}\right] = \frac{s(1-e^x)}{1-s} \end{aligned}$$

D'où :

$$\bar{N}_s(t) = \frac{s}{1-s} (1 - e^{-(\mu-\lambda)t}), s < 1 \quad (4.23)$$

b. Nombre moyen de clients dans la file à un instant t

$$\bar{N}_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_n^{(t)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (n P_n^{(t)} - \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(t)}) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} n P_n^t - (\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(t)} - P_0^{(t)}) \\
 &= \bar{N}_f(t) - (1 - P_0^{(t)}) \\
 &= \bar{N}_s(t) - [1 - (1 - s)(1 - e^x)] \text{ avec } X = -(\mu - \lambda)t \text{ et } S = \frac{\lambda}{\mu} \\
 &= \bar{N}_s(t) - S(1 - s)e^x \\
 &= \frac{S}{1-S} (1 - e^x - S) \\
 &= \frac{s(1-e^x) - (1-S)^2 e^x - S(1-S)}{1-S} \\
 &= \frac{Se^x - e^x - S^2 - e^x - S(1-S)}{1-S} \\
 &= \frac{S^2 - (S^2 - S + 1)e^x}{1-S}, \quad X = -(\mu - \lambda)t
 \end{aligned}$$

D'où

$$\bar{N}_s(t) = \frac{s^2}{1-S} - \frac{(S^2 - S + 1)e^{-(\mu - \lambda)t}}{1-S} \quad S < 1 \quad (4.24)$$

c. Temps moyen d'attente des clients dans le système pendant une période t

$$\bar{T}_s(t)^d = \frac{\bar{N}_f(t)}{d(t)} = \bar{N}_s(t) \cdot (d(t))^{-1} \text{ ou } d(t) \text{ est le débit du système à une date } t$$

D'après [1], p 66 et [2], on sait que :

$$d(t)^d = (1 - (1 - p_0^{(t)}) \cdot \mu = \mu[S + (1 - S)e^x] \text{ ou } X = -(\mu - \lambda)t$$

D'où :

$$d(t) = \mu[S + (1 - S)e^{-(\mu - \lambda)t}] \quad (4.25)$$

Ainsi, $\bar{T}_s(t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_s(t) &= \left[\frac{S(1-e^x)}{1-S} \right] \left[\frac{1}{\mu[S + (1-S)e^x] - S} \right] \text{ Avec } S = \frac{\lambda}{\mu} \text{ et } X = -(\mu - \lambda)t. \\
 &= \frac{S(1-e^x)}{\mu(1-S)[S + (1-S)e^x]}
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\bar{T}_s(t) = \frac{S(1-e^{-(\mu - \lambda)t})}{\mu(1-S)[S + (1-S)e^{-(\mu - \lambda)t}]} \quad (4.26)$$

d. Temps moyen d'attente des clients dans la file pendant un instant.

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_f(t)^d &= \bar{N}_f(t)(d(t))^{-1} \\
 &= \left[\frac{S^2 - (S^2 - S + 1)e^x}{1-S} \right] \left[\frac{1}{\mu[S + (1-S)e^x]} \right] \quad X = -(\mu - \lambda)t \\
 &= \left[\frac{S^2 - (S^2 - S + 1)e^x}{\mu(1-S)[S + (1-S)e^x]} \right]
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\overline{T_f}(t) = \frac{S^2 - (S^2 - S + I)e^{-(\mu - \lambda)t}}{\mu(I - S)[S + (I - S)e^{-(\mu - \lambda)t}]}, S < 1 \quad (4.27)$$

III. EXEMPLE ILLUSTRATIVE DU MODELE D'ATTENTE M/M/1

1. Enoncé

Les arrivées à une cabine téléphonique suivent la loi de poisson de moyennes 15 personnes par heure. Chaque communication dure en moyenne en régime transitoire :

- $\overline{N_f}(t)$
- $\overline{N_s}(t)$
- $\overline{T_f}(t)$
- $\overline{T_s}(t)$

2. représenter graphiquement ces paramètres de performance

Solution

λ = taux d'arrivée (au nombre moyen de clients qui arrivent dans la file par unité de temps)

$\lambda = 15 \text{ pers / heure.}$

$\frac{l}{\mu}$ = durée moyen de service ($\frac{l}{\mu} = 3 \text{ min} \Rightarrow \mu = 20 \text{ heure}$) l'intensité de trafic $S = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{20} = 0,75$.

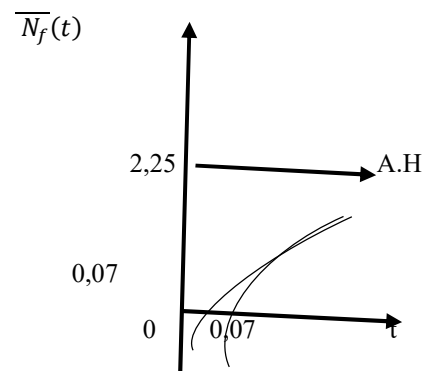
$$\text{a) } \overline{T_f}(t) = \frac{S^2(S^2 - S + I)e^{-(\mu - \lambda)t}}{I - S} = \frac{(0,75)^2 - [(0,75)^2 - 0,75 + I]e^{-(20 - 15)t}}{1 - 0,75}$$

$$\frac{0,5625 - 0,8125e^{-5t}}{0,25} = 2,25 - 3,25e^{-5t}$$

D'où

$$\overline{T_f}(t) = 2,25 - 3,25e^{-5t} \quad t \geq 0$$

T	0,07	0,12	0,2	$+\infty$
$\overline{N_f}(t)$	0	0,5	1	2,25

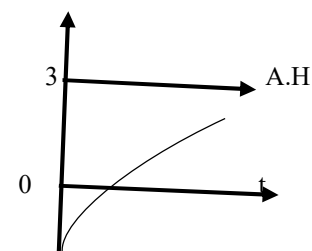


$$\text{b) } \overline{N_s}(t) = \frac{S}{I - S} (1 - e^{-(\mu - \lambda)t}) = \frac{0,75}{1 - 0,75} (1 - e^{-(20 - 15)t}) = 3 - 3e^{-5t} \quad \overline{N_s}(t)$$

D'où :

$$\overline{N_s}(t) = 3 - 3e^{-5t}, t \geq 0$$

T	0	0,04	0,08	0,22	0,36	$+\infty$
$\overline{N_s}(t)$	0	0,5	1	2	2,5	3

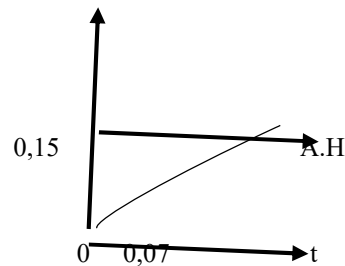


$$\text{c) } \overline{T_f}(t) = \frac{S^2 - (S^2 - S + I)e^{-(\mu - \lambda)t}}{\mu(I - S)[S + (I - S)e^{-(\mu - \lambda)t}]}$$

$$= \frac{(0,75)^2 - [(0,75)^2 - 0,75 + 1]e^{-5t}}{20(1-0,75)[0,75 + (1-0,75)e^{-5t}]} = \frac{0,5625 - 0,8125e^{-5t}}{3,75 + 1,25e^{-5t}}$$

$$\overline{T_f}(t) = \frac{0,5625 - 0,8125e^{-5t}}{3,75 + 1,25e^{-5t}}, \overline{T_f}(t)$$

T	0,	0,2	0,3	$+\infty$
$\overline{T_f}(t)$	0	0,05	0,1	0,15



$$d) \overline{T_f}(t) = \frac{s(1-e^{-(\mu-\lambda)t})}{\mu(1-s)[s+(1-s)e^{-(\mu-\lambda)t}]} = \frac{0,75(1-e^{-5t})}{5(0,75+0,25e^{-5t})} \quad \overline{T_f}(t)$$

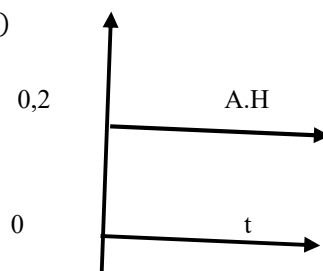
$$\frac{0,75-0,75e^{-5t}}{5,75+1,25e^{-5t}}$$

$$t \geq 0$$

D'où

$$\overline{T_f}(t) = \frac{0,75-0,75e^{-5t}}{5,75+1,25e^{-5t}}$$

$$t \geq 0$$



Commentaires

$\overline{N}(t) = 2,25 - 3,25e^{-5t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \overline{N_f}(t) = 2,25$ est l'asymptote Horizontale (A.H) d'équation $\overline{N_f}(t) = 2,25$. En d'autres termes cela veut dire que le nombre moyen des clients en attente

Dans la file ne peut excéder 2 ou quel nombre moyen de clients qui arrive à une cabine téléphonique à un instant quelconque t attendant ne peut aller au-delà de 2 clients (cfr le graphique du point a)).

- $\overline{N_s}(t) = 3 - 3e^{-5t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \overline{N_s}(t) = 3$ est l'A.H d'équation $\overline{T_f}(t)$

- $\overline{N_s}(t) = 3$, c'est à dire que le nombre moyen de clients en attente et au Service ne peut pas dépasser 3 clients. En d'autres termes, on doit avoir 2 clients dans la file et un seul client en service dans la cabine téléphonique (Cfr le graphique que du point b)

$$\overline{T_f}(t) = \frac{0,5625 - 0,8125e^{-5t}}{3,75 + 1,25e^{-5t}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \overline{T_f}(t) = 0,15h \text{ est l'A.H d'équation } \overline{T_f}(t) = 0,15h. \text{ cela}$$

Veut dire que le temps moyen d'attente que doit mettre un chat dans la file a une cabine téléphonique avant d'être servi ne peut pas excéder à minutes (cfr. Graphique du point C)

- $\overline{T_s}(t) = \frac{0,75-0,75e^{-5t}}{3,75+1,25e^{-5t}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \overline{T_f}(t) = 0,2heures \text{ est l'A.H d'équation}$

$$\overline{T_f}(t) = 0,2heur \text{ c'est à dire que le temps moyen de séjours que peut}$$

Mettre un client à l'attente et au service à une cabine téléphonique ne peut pas aller au-delà de 12minutes pour quitter la cabine (cfr le graphique du point d)

Conclusion

Au terme de cet article scientifique dont le sujet est intitulé “ **Evaluation des paramètres de performance du système d’attente M/M/1 en régime transitoire**”, il a été question de déterminer en priorité la probabilité d’état $P_n^{(t)}, t \geq 0$ liée à ce système d’attente qui a permis de

Calculer les paramètres de performance du système M/M/1 en régime transitoire ou ces paramètres sont des fonctions dépendant du temps ou ces fonctions sont des quantités, la méthode appropriée pour la détermination de probabilité d’état du modèle en régime transitoire.

Notre contribution originale consiste à déterminer les formules mathématiques de probabilité d’état et des paramètres de performance du système d’attente Markovien MIMI1 en régime transitoire du régime. Permanent ou elles sont des nombres constants.

Références

- [1] Agnès, L., *Processus stochastiques et modélisation*, ISMAG, Master 2 MI00451X, Toulouse, 137 p., 2013.
- [2] Alonge, O. J., Analyse des paramètres de performance des systèmes d’attente markoviens en régime transitoire, Mémoire de D.E.A., UPN, Kinshasa, 2020.
- [3] Al-Seedy, R. O., El-Sherbeny, A. A., El-Shehawy, S. A. et Ammar, S. I., Transient solution of the M/M/1/C queue with balking and reneging, *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 57, Inde, 2009, pp. 1280-1285.
- [4] Baynat, B., *Théorie des files d’attente : des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit*, Hermès Science Publications, Paris, 2000, 232 p.
- [5] Chandrasekaran, V. M. et Saravanarajan, M. C., Transient and reliability analysis of M/M/1 feedback queue subject to catastrophes, server failures and repairs, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 77, n° 5, Inde, 2012, pp. 606-625.
- [6] Cimbéla, K. J., Séminaire des questions spéciales de méthodologie de la recherche orientée en sciences pures et appliquées destiné aux auditeurs du 3e cycle, UPN, Kinshasa, 2018.
- [7] Hormonière, P. J., Transformation de Laplace, Analyse T4, TD n°5, disponible sur : www.univ-lyon1.fr/rmironescu/resource/math4-5.pdf (consulté le 24/08/2018), Lyon, 2016, 22 p.
- [8] Mabela, M. R. et Alonge, O. J., Évaluation des paramètres de performance du système d’attente markovien M/M/1 en régime transitoire, *Annales de la Faculté des Sciences, UNIKIN*, vol. 1, 2019, pp. 115-125, Kinshasa.
- [9] Many, N. L., *Cours de gestion des stocks*, 2e Licence Informatique de Gestion, UNIKIN, RDC, 2014, 134 p.
- [10] Mukéba, K. J. P., Chaînes de Markov, théories et évaluation des paramètres de performance d’un réseau de files d’attente à forme produit, Thèse de doctorat en Mathématiques appliquées, UPN, Kinshasa, 2016, 246 p.
- [11] Piskunov, N., *Calcul différentiel et intégral*, Tome 2, Éditions Mir-Moscou, 1980, 610 p.
- [12] Sharma, O. P. et Tarabia, A. M. K., A simple transient analysis of an M/M/1/N queue, *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, vol. 62, série A, part 2, 2000, pp. 273-281.
- [13] Ycart, B., *Les files d’attente*, Cahiers de Mathématiques appliquées n°14, Université de Tunis, 2010, 132 p.