International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
Vol. 55 No. 2 February 2026, pp. 395-409

Sur Le Procède D'Orthonormalisation De Gramm-Schmidt Dans L'Espace De Beppo Levi $BL^1(\Omega)$

[1]LORANU LONDJIRINGA Emilien*, [2]TAMBA OF'R Gordien and [3]PENGE ABY Célestin

[1.] Institut Supérieur Pédagogique de Bunia (ISP/BUNIA), Ituri, R. D. Congo)
Section Sciences Exactes, Département de Mathématique-Physique
E-mail: loranuemilein@icloud.com, N$^{\underline{o}}$ Tel: +243826296641
[2.] Université Pédagogique Nationale (UPN), Kinshasa, R.D. Congo
Faculté des Sciences et Technologie, Département de Mathématique-Informatique
E-mail : gordientamba23@gmail.com, N$^{\underline{o}}$ Tel: +243818669666
[3.] Université de Kinshasa (UNIKIN), Kinshasa, R.D. Congo
Faculté de Polyethnique, E-mail : pengecelestin@gmail.com,
N$^{\underline{o}}$ Tel: +243818406882

Résumé : L'espace de Beppo Levi $BL^1(\Omega)$, défini pour un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, regroupe les fonctions f appartenant à $C_C^\infty(\Omega)$ dont les dérivées partielles sont dans $L^2(\Omega)$. Ce cadre formel présente un produit scalaire qui établit la structure d'un espace de Hilbert, permettant d'explorer des notions d'orthogonalité et de construction de bases orthonormales. La définition d'une isométrie vectorielle souligne que la préservation du produit scalaire est synonyme de conservation de la norme. Par ailleurs, une base est dite orthonormée si chaque paire de fonctions est orthogonale, facilitant l'analyse de la dépendance linéaire. L'orthogonalité entre fonctions est formalisée, permettant d'établir des décompositions uniques dans $BL^1(\Omega)$. L'algorithme de Gram-Schmidt est appliqué pour générer des bases orthonormales à partir de bases existantes, illustrant son utilité dans le contexte des espaces préhilbertiens. Enfin, un exemple pratique montre le processus d'orthogonalisation dans $BL^1(\Omega)$ avec des fonctions spécifiques, soulignant la méthodologie et les calculs impliqués.

Mots clés : produit scalaire de $BL^1(\Omega)$, norme de $BL^1(\Omega)$, orthogonalité des fonctions, base orthonormale, Construction de procédé d'Orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Abstract: The Beppo Levi space $BL^1(\Omega)$, defined for an open set Ω of $\mathbb{R}^n$, consists of functions ff belonging to $C_C^\infty(\Omega)$ whose partial derivatives are in $L^2(\Omega)$.. This formal framework presents an inner product that establishes the structure of a Hilbert space, allowing for the exploration of notions of orthogonality and the construction of orthonormal bases. The definition of a vector isometry emphasizes that the preservation of the inner product is synonymous with the conservation of the norm. Furthermore, a basis is called orthonormal if every pair of functions is orthogonal, facilitating the analysis of linear dependence. Orthogonality between functions is formalized, allowing for the establishment of unique decompositions in $BL^1(\Omega)$. The Gram-Schmidt algorithm is applied to generate orthonormal bases from existing bases, illustrating its utility in the context of pre-Hilbert spaces. Finally, a practical example demonstrates the orthogonalization process in $BL^1(\Omega)$ with specific functions, highlighting the methodology and calculations involved.

Keywords: scalar product of $BL^1(\Omega)$, norm of $BL^1(\Omega)$, orthogonality of functions, orthonormal basis, Gram-Schmidt orthonormalization process construction.

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
SCHOLAR AI Be Smart
Vol. 55 No. 2 February 2026, pp. 395-409

1. Introduction

L'espace de Beppo Levi d'ordre un, noté $BL^1(\Omega)$ est un cadre mathématique essentiel qui généralise les distributions en incluant celles dont les dérivées sont carrées intégrables. Il est défini comme suit : $BL^1(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / f \epsilon\, D'(\Omega)\ et\ \nabla f \epsilon L^2(\Omega)\}$, où $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ constitue le gradient de la fonction f par rapport à chacune des variables x_i au sens de distribution (ou faible). Cet espace est particulièrement important en analyse fonctionnelle, car il permet d'étudier la régularité des fonctions, tout en intégrant les exigences de l'intégrabilité des dérivées.

Cet espace sur lequel est axé notre étude est également important pour la résolution de problèmes liés aux équations aux dérivées partielles. En effet, la possibilité d'appliquer des techniques d'analyse variée, comme l'orthogonalisation de Gram-Schmidt, facilite la construction de bases orthogonales et orthonormées dans cet espace. Cela renforce les outils disponibles pour l'analyse et la résolution de problèmes complexes.

Dans cette connotation, nous nous intéressons en particulier aux fonctions dont la courbe est générale du second degré en deux variables x et y telles que :

$$f(x, y) = \mu x^2 + \varphi y^2 + 2\rho y + 2\eta x + 2\delta y + \theta$$

et *un* domaine d'intégration rectangulaire de la forme $[m, n] \times [m, n]$. Comme source d'inspiration, nous avons consulté [9] un article de recherche de portant sur la conception et l'implémentation de procédé d'Orthogonalisation de Gram-Schmidt dans l'espace de sobolev $H^1(\Omega)$. D'autant plus que l'espace de Beppo Levi est un espace de Sobolev homogène, il sera de même possible de construire une base orthonormale dans $BL^1(\Omega)$.

Les algorithmes d'orthogonalisation et d'Orthonormalisation utilisés dans les espaces numériques peuvent être appliqués de manière analogue dans les espaces fonctionnels, et plus spécifiquement dans le cas d'espace de Beppo Levi d'ordre un. Ce manuscrit explore en profondeur ces concepts et leur applicabilité.

2. Espace de Beppo Levi $BL^1(\Omega)$ [4], [10]

2.1. Définitions et Propriétés [1], [2], [3]

Définition 2.1.1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace de Beppo Levi $BL^1(\Omega)$ est défini par :

$BL^1(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R} / f \epsilon\, C_\Omega^\infty(\Omega)\ et\ \frac{\partial f}{\partial x_i} \epsilon\, L^2(\Omega)\right\}$ où $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle de la fonction f au sens faible (c'est-à-dire de distribution) et $i = \{1, \dots, n\}$, donnée par :

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \psi \rangle = -\langle f, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rangle, \forall\, \psi \,\epsilon\, D(\Omega)$$

Définition 2.1.2

Le produit scalaire sur $BL^1(\Omega)$, noté par $\langle ., . \rangle_{BL^1(\Omega)}$ est défini par :

$$\langle f, g \rangle_{BL^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\, dx_1 \dots dx_n\, , \forall f, g \in BL^1(\Omega)$$

En particulier ; on a :

$$\langle f, g \rangle_{BL^1(\Omega)} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1}(x). \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) dx_1 + \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_2}(x). \frac{\partial g}{\partial x_2}(x) dx_2, \forall i = \{1,2\}$$

Définition 2.1.3

La norme associée à ce produit scalaire est donnée par :

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
Vol. 55 No. 2 February 2026, pp. 395-409

$$\|f\|_{BL^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \forall f \epsilon\, BL^1(\Omega)$$

Notons que du point de vue structurel de l'espace fonctionnel considéré, la semi-norme est égale à la norme.

Proposition 2.1.4 [7], [9], [13]

Le couple $\left(BL^1(\Omega), \langle .,. \rangle_{BL^1(\Omega)}\right)$, avec $BL^1(\Omega)$ étant un espace vectoriel et $\langle .,. \rangle_{BL^1(\Omega)}$ un produit scalaire sur $BL^1(\Omega)$, est un espace Préhilbertien.

De même le couple $\left(BL^1(\Omega), \|.\|_{BL^1(\Omega)}\right)$ est un espace normé.

2.2. Orthonormalisation et orthogonalité dans $BL^1(\Omega)$ [12], [16]

2.2.1. Isométrie vectorielle dans $BL^1(\Omega)$

Définition 2.2.1.1 [6], [7]

Soit $BL^1(\Omega)$ un espace préhilbertien réel et E un sous-espace vectoriel réel de $BL^1(\Omega)$.

Un endomorphisme f de $BL^1(\Omega)$ est une isométrie vectorielle ssi :

$$\forall x, y \epsilon E\, ; \langle f(x), f(y)\rangle_{BL^1(\Omega)} = \langle x, y\rangle.$$

C'est-à-dire f conserve le produit scalaire.

Théorème 2.2.1.2 [2], [9]

Soit f un endomorphisme de $BL^1(\Omega)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est une isométrie vectorielle ;

(ii) f conserve la norme, c'est-à-dire $\forall\, x \in E, \|f(x)\|_{BL^1(\Omega)} = \|x\|$

Démonstration

- Condition nécessaire

Supposons que f est une isométrie vectorielle, c'est-à-dire

$$\forall\, x, y \in E, \langle f(x), f(y)\rangle_{BL^1(\Omega)} = \langle x, y\rangle$$

On a : $\|f(x)\|_{BL^1(\Omega)} = \sqrt{\langle f(x), f(x)\rangle_{BL^1(\Omega)}}$

$= \sqrt{\langle x, x\rangle}$

$= \|x\|$

- Condition suffisante

Supposons que f conserve la norme comme évoquée précédemment , c'est-à-dire :

$\forall x \in E, \|f(x)\|_{BL^1(\Omega)} = \|x\|$; soient $x, y \in E,$

D'une part, $\|f(x+y)\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = \|x+y\|$ (car f conserve la norme)

$= \langle x+y, x+y\rangle$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
SCHOLAR AI Be Smart
Vol. 55 No. 2 February 2026, pp. 395-409

$= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$

$= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$ (*)

D'autre part, $\|f(x+y)\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = \|f(x)+f(y)\|^2{}_{BL^1(\Omega)}$ (car f est linéaire)

$= \langle f(x)+f(y), f(x)+f(y)\rangle_{BL^1(\Omega)}$

$= \langle f(x), f(x)\rangle_{BL^1(\Omega)} + 2\langle f(x), f(y)\rangle_{BL^1(\Omega)} + \langle f(y), f(y)\rangle_{BL^1(\Omega)}$

$= \|f(x)\|^2{}_{BL^1(\Omega)} + 2\langle f(x), f(y)\rangle_{BL^1(\Omega)} + \|f(y)\|^2{}_{BL^1(\Omega)}$

$= \|x\|^2 + 2\langle f(x), f(y)\rangle_{BL^1(\Omega)} + \|y\|^2$ (car $\|f(x)\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = x$ et $\|f(y)\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = y$)(**)

Par suite (*) et (**) donnent :

$\|x\|^2 + 2\langle f(x), f(y)\rangle_{BL^1(\Omega)} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$

$\Leftrightarrow 2\langle f(x), f(y)\rangle_{BL^1(\Omega)} = 2\langle x, y\rangle$

$\Leftrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle_{BL^1(\Omega)} = \langle x, y\rangle$ (par le principe de régularité)

Proposition 2.2.1.3 [**5**], [**7**], [**12**]

Soit $f \epsilon\ BL^1(\Omega)$ une isométrie vectorielle de E, alors f est injective.

Preuve

Soit $x\ \epsilon\ Kerf$; c'est-à-dire $f(x) = 0$.

On a : $\|f(x)\|_{BL^1(\Omega)} = \|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow\ \vec{x} = 0$.

D'où $Kerf = \{0\}$

Par suite $f \epsilon\ BL^1(\Omega)$ est injective.

2.2.2. Définition d'une base orthonormale [**8**], [**11**], [**13**]

Soit $BL^1(\Omega)$ un espace préhilbertien réel de dimension $n < +\infty$ et E un sous-espace vectoriel réel de $BL^1(\Omega)$.

Soit $B = (f_i)_{i=1}^n$ une base de $BL^1(\Omega)$.

On dit que $B\ \ est$ une base orthonormée ou base orthonormale si et seulement si :

$\forall\ i,j\ \in\ [1,n] \cap \mathbb{N}, \langle f_i, f_j\rangle_{BL^1(\Omega)} = 0$ si $i \neq j$ et $\langle f_i, f_j\rangle_{BL^1(\Omega)} = 1$ si $i = j$

Notons que le symbole : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ \ i = j \\ 0 & si\ \ i \neq j \end{cases}$ est appelé symbole de Kronecker.

Cela implique que $B = (f_i)_{i=1}^n$ est une base orthonormée si et seulement si $\langle f_i, f_j\rangle_{BL^1(\Omega)} = \delta_{ij}$

Soient $x, y\ \in E\ \subset\ BL^1(\Omega)$. Comme $B = (f_i)_{i=1}^n$ est une base de $BL^1(\Omega)$, alors il existe $\alpha_i, \beta_i\ \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . f_i \quad et \quad y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i . f_j\ . On\ a :$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
Vol. 55 No. 2 February 2026, pp. 395-409

$$\langle x,y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . f_i , \sum_{i=1}^{n} \beta_i . f_j \rangle_{BL^1(\Omega)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i . \beta_i \langle f_i, f_j \rangle_{BL^1(\Omega)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i . \beta_i . \delta_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i . \beta_1 .. \delta_{i1} + \alpha_i . \beta_2 .. \delta_{i2} + \cdots + \alpha_i . \beta_i .. \delta_{ii} + \cdots + \alpha_i . \beta_n . \delta_{in})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \beta_i = \alpha_1 . \beta_1 + \alpha_2 . \beta_2 + \cdots + \alpha_n . \beta_n$$

En particulier ; on obtient :

$$\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . f_i , \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . f_i \rangle_{BL^1(\Omega)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \alpha_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i{}^2 \text{ ; et}$$

$$\|y\|^2 = \langle y,y\rangle$$

$$= \langle \sum_{j=1}^{n} \beta_j . f_j , \sum_{j=1}^{n} \beta_j . f_j \rangle_{BL^1(\Omega)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \beta_j . \beta_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \beta_j{}^2 .$$

2.2.3. Orthogonalité dans l'espace $BL^1(\Omega)$ [6], [8], [9], [14]

Définition 2.2.3.1 (Orthogonalité) [5]

Soit $\left(BL^1(\Omega), \langle .,. \rangle_{BL^1(\Omega)}\right)$ est un espace préhilbertien.

Deux fonctions $f, g \in BL^1(\Omega)$ sont dites orthogonales (ou f est orthogonale à g) si et seulement si $\langle f, g\rangle_{BL^1(\Omega)} = 0$.

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
Vol. 55 No. 2 February 2026, pp. 395-409

Cette relation est symétrique : si f est orthogonale à g, alors g est orthogonale à f, car :

$$\langle f, g\rangle_{BL^1(\Omega)} = \langle g, f\rangle_{BL^1(\Omega)} = 0.$$

Définition 2.2.3.2 (Supplémentaire orthogonal) [7]

Soit $S \subset BL^1(\Omega)$ un sous-ensemble.

On définit son supplémentaire orthogonal par :

$$S^\perp = \{f \in BL^1(\Omega) / \langle f, v\rangle_{BL^1(\Omega)} = 0, \forall\, v \in S\}$$

En particulier, pour une fonction $v \in BL^1(\Omega)$; on définit :

$$v^\perp = \{f \in BL^1(\Omega) / \langle f, v\rangle_{BL^1(\Omega)} = 0\}$$

Proposition 2.2.3.3 (Décomposition orthogonale) [6], [8], [9]

Soit $S \subset BL^1(\Omega)$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors : $BL^1(\Omega) = S \oplus S^\perp$. C'est-à-dire que toute fonction de $BL^1(\Omega)$ s'écrit de manière unique comme la somme directe d'une fonction S et celle de $S^\perp$.

Définition 2.2.3.4 (Famille orthogonale et orthonormée) [9], [13]

Rappelons qu'une famille $\mathcal{F} = \{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subset BL^1(\Omega)$ est dite orthogonale, si : $\langle g_i, g_j\rangle_{BL^1(\Omega)} = 0$ pour $i \neq j$, et orthonormée, si $\langle g_i, g_j\rangle_{BL^1(\Omega)} = \delta_{ij}$

Proposition 2.2.3.5 (Indépendance linéaire d'une famille orthogonale) [12]

Toute famille orthogonale de fonctions non nulles dans $BL^1(\Omega)$ est linéairement indépendante.

Proposition 2.2.3.6 (Système libre des fonctions dans $BL^1(\Omega)$) [11]

Soit $(f_i)_{i=1}^n = (f_1, f_2, \dots \dots, f_n)$ une famille de n fonctions non nulles de $BL^1(\Omega)$. Si ces fonctions sont deux à deux orthogonales, alors elles constituent un système libre.

Démonstration

Soit $B = (f_i)_{i=1}^n$, une famille de n fonctions non nulles de l'espace de Beppo- Levi d'ordre un noté $BL^1(\Omega)$.

Supposons que $\forall\, f_i, f_j \in B, \langle f_i, f_j\rangle = 0$ avec $i \neq j$ et $i, j \in [1, n] \cap \mathbb{N}$.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_j f_j + \cdots + \alpha_n f_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0\,,$$

$$On\ a :\ \langle 0, f_j\rangle = 0$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
Vol. 55 No. 2 February 2026, pp. 395-409

$$\Leftrightarrow \langle \sum_{i-1}^{n} \alpha_i . f_i \ , \ f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_j f_j + \alpha_{j+1} f_{j+1} + \cdots + \alpha_n f_n \ , f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_{j-1} f_{j-1} + \alpha_{j+1} f_{j+1} + \cdots + \alpha_n f_n \ , f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} + \langle \alpha_j f_j , f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \ , f_j \ \rangle_{BL^1(\Omega)} + \alpha_j \langle f_j, f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} = 0$$

Si $i \neq j$, on a :

$$\langle \alpha_1 f_1 \ , f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} + \langle \alpha_2 f_2 \ , f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} + \cdots + \langle \alpha_{j-1} f_{j-1} \ , f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} + \langle \alpha_{j+1} f_{j+1} \ , f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} + \langle \alpha_n f_n \ , f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} + \alpha_j \langle f_j, f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \alpha_1 \langle f_1, f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} + \alpha_2 \langle f_2, f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} + \cdots + \alpha_{j-1} \langle f_{j-1}, f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} + \alpha_{j+1} \langle f_{j+1}, f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} + \alpha_n \langle f_n, f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} + \alpha_j \langle f_j, f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \langle f_i \ , f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} + \alpha_j \langle f_j \ , f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . 0 + \alpha_j \langle f_j, f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_j \langle f_j, f_j \rangle_{BL^1(\Omega)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_j \left\| f_j \right\|_{BL^1(\Omega)}^2 = 0$$

Comme ces fonctions sont toutes non nulles alors $f_j \neq 0$, d'où $\alpha_j = 0, \forall \ j \ \in \ [1, n] \cap \mathbb{N}$.

Donc, le système $B = (f_i)_{i=1}^n$ est libre. ■

Proposition 2.2.3.7 (Construction d'Orthonormalisation de Gramm-Schmidt dans l'espace de Beppo Levi $BL^1(\Omega)$) [8], [9]

Soit $B = (f_i)_{i=1}^n$ une base de $BL^1(\Omega)$ avec $\dim\big(BL^1(\Omega)\big) = n < +\infty$; il existe une base orthonormée $B' = \{g_i\}_{i=1}^n$ construite à partir de B.

Démonstration

Soit $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ une base de $BL^1(\Omega)$

Posons $f_1{}' = f_1$

$$f_2{}' = f_2 - \frac{\langle f_2, f_1{}' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1{}'\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_1{}'$$

$$f_3{}' = f_3 - \frac{\langle f_3, f_1{}' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1{}'\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_1{}' - \frac{\langle f_3, f_2{}' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_2{}'\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_2{}'$$

$$f_4{}' = f_4 - \frac{\langle f_4, f_1{}' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1{}'\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_1{}' - \frac{\langle f_4, f_2{}' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_2{}'\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_2{}' - \frac{\langle f_4, f_3{}' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_3{}'\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_3{}'$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
Vol. 55 No. 2 February 2026, pp. 395-409

$$f_5' = f_5 - \frac{\langle f_5, f_1' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1'\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_1' - \frac{\langle f_5, f_2' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_2'\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_2' - \frac{\langle f_5, f_3' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_3'\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_3' - \frac{\langle f_5, f_4' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_4'\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_4'$$

……………………………………………………………………………………………………

$$f_k' = f_k - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle f_k, f_i' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_i'\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_i' \quad avec \ \ k \in [2, n] \cap \mathbb{N}$$

Montrons que la famille $B' = \{f_i'\}_{i=1}^{n} = \{f_1', f_2', \dots, f_n'\}$ est constituée des fonctions non nulles et deux à deux orthogonales.

Faisons une démonstration par récurrence sur n.

1. Conditions initiales : $n = 1$, $B' = \{f_1'\}$, on a :

$f_1' \neq 0$

$n = 2, B' = \{f_1', f_2'\}, n = 3 \Rightarrow B' = \{f_1', f_2', f_3'\}$,

Montrons que $f_2' \neq 0$

Supposons par absurde que $f_2' = 0$; alors :

$$f_2' = f_2 - \frac{\langle f_2, f_1' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1'\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_1' = 0$$

$$\Leftrightarrow f_2 - \frac{\langle f_2, f_1' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1'\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_1' = 0$$

$$\Leftrightarrow f_2 - \frac{\langle f_2, f_1 \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_1 = 0 \quad (\text{car } f_1' = f_1)$$

$f_1 \ et \ f_2$ étant des fonctions de la base $B = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ alors $\{f_1, f_2\}$ est une famille libre, d'où toute combinaison linéaire de $f_1 \ et \ f_2$ est nulle si tous les scalaires sont nuls.

On a : $f_2 - \frac{\langle f_2, f_1 \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_1 = 0 \ \Rightarrow 1 = 0$ et $\frac{\langle f_2, f_1 \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_1 = 0$.

Ce qui est absurde, d'où $f_2' \neq 0$.

Montrons que $f_3' \neq 0$

Supposons que $f_3' = 0$, alors :

$$f_3 - \frac{\langle f_3, f_1' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1'\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_1' - \frac{\langle f_3, f_2' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_2'\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_2' = 0$$

$$\Leftrightarrow f_3 - \frac{\langle f_3, f_1 \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_1 - \frac{\langle f_3, f_2' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_2'\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_2' = 0$$

$$\Leftrightarrow f_3 - \frac{\langle f_3, f_1 \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_1 - \frac{\langle f_3, f_2 - \frac{\langle f_2, f_1 \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_1 \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}} . \left(f_2 - \frac{\langle f_2, f_1 \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}} . f_1\right) = 0$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
Vol. 55 No. 2 February 2026, pp. 395-409

$$\Leftrightarrow f_3 - \frac{\langle f_3,f_1\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}}.f_1 - \frac{\langle f_3,f_2\rangle_{BL^1(\Omega)} - \frac{\langle f_2,f_1\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}} - \langle f_3,f_1\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}}.(f_2 - \frac{\langle f_2,f_1\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}}.f_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow f_3 - \frac{\langle f_3,f_1\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}}.f_1 - \left(\frac{\langle f_3,f_2\rangle_{BL^1(\Omega)} - \frac{\langle f_2,f_1\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}} - \langle f_3,f_1\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}}\right).f_2$$
$$+ \left(\frac{\langle f_3,f_2\rangle_{BL^1(\Omega)} - \frac{\langle f_2,f_1\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}} - \langle f_3,f_1\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}}\right).\frac{\langle f_2,f_1\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}}.f_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}\langle f_1,f_2\rangle_{BL^1(\Omega)}.\langle f_2,f_3\rangle_{BL^1(\Omega)} - \langle f_1,f_3\rangle_{BL^1(\Omega)}.\langle f_1,f_2\rangle^2_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^6_{BL^1(\Omega)}} - \frac{\langle f_1,f_3\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}}\right).f_1$$
$$-\left(\frac{\|f_1\|^2_{BL^1(\Omega)}\langle f_2,f_3\rangle_{BL^1(\Omega)} - \langle f_1,f_2\rangle_{BL^1(\Omega)}.\langle f_1,f_3\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^4_{BL^1(\Omega)}}\right)f_2 + f_3 = 0$$

Comme $\{f_1, f_2, f_3\} \subset B = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ alors $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une famille libre.

D'où toute combinaison linéaire de f_1, f_2 *et* f_3 est nulle si et seulement si tous les scalaires sont nuls.

Donc $1 = 0$. Ce qui est absurde, par suite $f_3{}' \neq 0$.

Hypothèse de récurrence (1) [14], [15]

Supposons que $f_{k-1}{}' \neq 0$ et montrons que $f_k{}' \neq 0$ avec $k \in [3, n] \cap \mathbb{N}$

$$f_{k-1}{}' \neq 0 \Leftrightarrow f_{k-1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle f_{k-1}, f_i{}'\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_i{}'\|^2_{BL^1(\Omega)}}.f_i{}' \neq 0 \;\; avec\ k \in [3, n] \cap \mathbb{N}$$

Supposons par absurde que $f_k{}' = 0 \Leftrightarrow f_k - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle f_k, f_i{}'\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_i{}'\|^2_{BL^1(\Omega)}}.f_i{}' = 0$ (1) avec $k \in [3, n] \cap \mathbb{N}$

Par construction, $\forall\, i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$, $f_i{}'$ est une combinaison linéaire des fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n$. Il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\langle f_k, f_i{}'\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_i{}'\|^2_{BL^1(\Omega)}}.f_i{}' = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j . f_j \qquad (2)$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
Vol. 55 No. 2 February 2026, pp. 395-409

En ramenant (2) dans (1), on obtient :

$$f_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j . f_j = 0 \,. Comme\ \{f_i\}_{i=1}^{k}\ est\ une\ famille\ libre\ de\ BL^1(\Omega), alors\ \alpha_j = 0,$$

$\forall\ j\ \epsilon [1, n] \cap \mathbb{N}$. Ce qui est absurde.

Donc $f_k{}' \neq 0\ , \forall\ k\ \in\ [3, n] \cap \mathbb{N}$.

Montrons que les fonctions $\{f_i{}'\}_{i=1}^{n}$ sont deux à deux orthogonales

Condition initiale

- $n = 2\ ,\ B = \{f_1, f_2{}'\}$

$\langle f_1, f_2{}' \rangle_{BL^1(\Omega)} = \langle f_1, f_2 - \frac{\langle f_2, f_1 \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2{}_{BL^1(\Omega)}} \rangle_{BL^1(\Omega)}$

$$= \langle f_1, f_2 \rangle_{BL^1(\Omega)} - \frac{\langle f_2, f_1 \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2{}_{BL^1(\Omega)}} . \langle f_1, f_2 \rangle_{BL^1(\Omega)}$$

$$= \langle f_1, f_2 \rangle_{BL^1(\Omega)} - \frac{\langle f_2, f_1 \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_1\|^2{}_{BL^1(\Omega)}} .\ \ \|f_1\|^2{}_{BL^1(\Omega)}$$

$$= \langle f_1, f_2 \rangle_{BL^1(\Omega)} - \langle f_2, f_1 \rangle_{BL^1(\Omega)}$$

$$= \langle f_1, f_2 \rangle_{BL^1(\Omega)} - \langle f_1, f_2 \rangle_{BL^1(\Omega)}$$

$$= 0$$

Hypothèse de récurrence (2) [16], [17]

Supposons , $\forall\ k\ \in\ [1, n-1] \cap \mathbb{N}$ et $f_1{}', f_2{}', \dots, f_n{}'$ sont deux à deux orthogonaux. Montrons que $f_{k+1}{}'$ est orthogonal aux vecteurs fonctionnels $\{f_i{}'\}_{i=1}^{k}$. Il suffit de montrer que $f_{k+1}{}'$ est orthogonal à n'importe quel vecteur de fonction $\{f_i{}'\}_{i=1}^{k}$.

Soit $m\ \in\ [1, k] \cap \mathbb{N}$.

On a :

$\langle f_{k+1}{}'\ , f_m{}' \rangle_{BL^1(\Omega)} = \langle f_{k+1}\ -\ \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle f_{k+1}, f_i{}' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_i{}'\|^2{}_{BL^1(\Omega)}} . f_i{}',\ f_m{}' \rangle_{BL^1(\Omega)}$

$$= \langle f_{k+1}\ , f_m{}' \rangle_{BL^1(\Omega)} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle f_{k+1}, f_i{}' \rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_i{}'\|^2{}_{BL^1(\Omega)}} . \langle f_i{}'\ , f_m{}' \rangle_{BL^1(\Omega)}$$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
Vol. 55 No. 2 February 2026, pp. 395-409

$$= \langle f_{k+1}\ ,f_m{}'\rangle_{BL^1(\Omega)} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle f_{k+1},\ f_i{}'\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_i{}'\|^2{}_{BL^1(\Omega)}} . \langle f_i{}'\ ,f_m{}'\rangle_{BL^1(\Omega)}$$

$$- \frac{\langle f_{k+1}\ ,f_m{}'\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_m{}'\|^2{}_{BL^1(\Omega)}} . \langle f_m{}'\ \ ,f_m{}'\rangle_{BL^1(\Omega)}$$

$$=\langle f_{k+1}\ \ ,f_m{}'\rangle_{BL^1(\Omega)} - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{k} \frac{\langle f_{k+1},f_i{}'\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_i{}'\|^2{}_{BL^1(\Omega)}} . 0 - \frac{\langle f_{k+1}\ ,f_m{}'\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_m{}'\|^2{}_{BL^1(\Omega)}} . \langle f_m{}'\ \ ,f_m{}'\rangle_{BL^1(\Omega)}$$

$$= \langle f_{k+1}\ \ ,f_m{}'\rangle_{BL^1(\Omega)} - \frac{\langle f_{k+1},\ f_m{}'\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|f_m{}'\|^2{}_{BL^1(\Omega)}} . \|f_m{}'\|^2{}_{BL^1(\Omega)}$$

$$= \langle f_{k+1}\ \ ,f_m{}'\rangle_{BL^1(\Omega)} - \langle f_{k+1}\ \ ,f_m{}'\rangle_{BL^1(\Omega)} = 0$$

Comme les fonctions de $B = \{f_1{}', f_2{}', \dots, f_n{}'\}$ sont non nulles et deux à deux orthogonales, alors $B = \{f_1{}', f_2{}', \dots, f_n{}'\}$ est une famille libre (d'après la proposition 2.2.3.6), $\dim(E \subset BL^1(\Omega)) = n < +\infty$, $B = \{f_1{}', f_2{}', \dots, f_n{}'\}$ est une base orthogonale de $BL^1(\Omega)$.

Posons $g_i = \frac{f_i{}'}{\|f_i{}'\|_{BL^1(\Omega)}}$. On a : $\|g_i\|_{BL^1(\Omega)} = \left\|\frac{f_i{}'}{\|f_i{}'\|_{BL^1(\Omega)}}\right\|_{BL^1(\Omega)}$

$$= \frac{1}{\|f_i{}'\|_{BL^1(\Omega)}} . \|f_i{}'\|_{BL^1(\Omega)}$$

$$= 1$$

Il en résulte que $B' = \{g_1, g_2, \dots, g_3\}$ est une base orthonormée de $BL^1(\Omega)$ ■

2.3. Application [9]

Considérons le sous-espace $S = \{f_1, f_2, f_3\}$ de $BL^1(\Omega)$, où $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $f_1(x,y) = x^2y - 1, f_2(x,y) = xy\ et\ \ f_3(x,y) = y$. Trouver une base orthonormale.

Solution

Appliquons pas à pas le procédé de Gram-Schmidt dans l'espace de Beppo-Levi $BL^1(\Omega)$, avec : $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

On a : $\langle f, g\rangle_{BL^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} . \frac{\partial g}{\partial y}\right) dxdy$

1) Fonction de départ

$f_1(x,y) = x^2y - 1, f_2(x,y) = xy\ et\ \ f_3(x,y) = y$

Gradients de ces fonctions sont :

$\nabla f_1 = (2xy, x^2)$, $\nabla f_2 = (y, x)$ et $\nabla f_3 = (0,1)$

2) Normes et produits scalaires

$\langle f, g\rangle_{BL^1(\Omega)} = \int_0^1 \int_0^1 \nabla f \nabla g dxdy$ et $\|f\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = \int_0^1 \int_0^1 |\nabla f|^2 dxdy$, par le théorème de Fubini, on a :

- Norme de f_1, $\|f_1\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = \int_\Omega ((2xy)^2 + (x^2)^2)\, dxdy$

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.
© 2026 Scholar AI LLC.
https://ijpsat.org/
Vol. 55 No. 2 February 2026, pp. 395-409

- $\int_0^1 \int_0^1 4x^2y^2dxdy = \frac{4}{3}.\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$
- $\int_0^1 \int_0^1 x^4dxdy = \frac{1}{5}$

C'est-à-dire $\|f_1\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = \frac{4}{9} + \frac{1}{5} = \frac{29}{45}$

- Produit scalaire $\langle f_2, f_1\rangle_{BL^1(\Omega)}$

  On a : $\nabla f_2.\nabla f_1 = y(2xy) + x(x^2) = 2xy^2 + x^3$

  - $\int_0^1 \int_0^1 2\,xy^2dxdy = \frac{1}{2}$
  - $\int_0^1 \int_0^1 2\,xy^2dxdy = \frac{1}{4}$

C'est-à-dire $\langle f_2, f_1\rangle_{BL^1(\Omega)} = \frac{3}{4}$

- Produit scalaire $\langle f_3, f_1\rangle_{BL^1(\Omega)}$

  $\nabla f_3.\nabla f_1 = (0,1).(2xy, x^2) = x^2$

  Cela implique $\int_0^1 \int_0^1\ x^2dxdy = \frac{1}{3}$

Norme de f_2, $\|f_2\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = \int_\Omega (y^2 + x^2)\, dxdy$

- $\int_0^1 \int_0^1 y^2dxdy = \frac{1}{3}$
- $\int_0^1 \int_0^1 x^2dxdy = \frac{1}{3}$

Ainsi, $\|f_2\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Norme de f_3, $\|f_3\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = \int_\Omega (0^2 + 1^2)\, dxdy = 1$

3) Procédé de Gram-Schmidt

On pose $g_1 = f_1$

- Calcul de $g_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, g_1\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|g_1\|^2{}_{BL^1(\Omega)}}.g_1$

  Avec $\langle f_2, f_1\rangle_{BL^1(\Omega)} = \frac{3}{4}$, $\|g_1\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = \frac{29}{45}$

  D'où $\alpha = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{29}{45}} = \frac{3}{4}.\frac{45}{29} = \frac{135}{116}$

  Ainsi, on en déduit que $g_2 = f_2 - \frac{135}{116}.f_1$

- Calcul de $g_3, on\ a$:

$g_3 = f_3 - \frac{\langle f_3, g_1\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|g_1\|^2{}_{BL^1(\Omega)}}.g_1 - \frac{\langle f_3, g_2\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|g_2\|^2{}_{BL^1(\Omega)}}.g_2$

a) Premier coefficient :

International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT)
ISSN: 2509-0119.

https://ijpsat.org/
Vol. 55 No. 2 February 2026, pp. 395-409

$\frac{\langle f_3,g_1\rangle_{BL^1(\Omega)}}{\|g_1\|^2{}_{BL^1(\Omega)}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{29}{45}} = \frac{1}{3}.\frac{45}{29} = \frac{15}{29}$, et après la première étape :

$h = f_3 - \frac{15}{29}.g_1$

b) Pour l'orthogonalisation avec g_2, on calcule :

$\langle f_3, g_2\rangle_{BL^1(\Omega)} = \langle f_3, f_2 - \frac{135}{116}\rangle_{BL^1(\Omega)}$

$= \frac{1}{2} - \frac{135}{116}.\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{45}{116} = \frac{13}{116}$

Pour poursuivre avec les démarches, on a besoin de $\|g_2\|^2{}_{BL^1(\Omega)}$;

Cependant $\|g_2\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = \|f_2\|^2{}_{BL^1(\Omega)} - \alpha\langle f_2, f_1\rangle_{BL^1(\Omega)}$

$= \frac{2}{3} - \frac{135}{116}.\frac{3}{4}$

Par suite : $\frac{135}{116}.\frac{3}{4} = \frac{405}{464}$ et $\frac{2}{3} = \frac{309}{464}$

D'où $\|g_2\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = \frac{405}{464} - \frac{309}{464} = \frac{96}{464} = \frac{1}{4{,}83}$

Et le second coefficient donne :

$\beta = \frac{\frac{13}{116}}{\frac{96}{464}} = \frac{13}{116}.\frac{464}{96} = \frac{6032}{11136}$

D'où la famille orthogonale des fonctions est :

$g_1(x,y) = x^2y - 1$

$g_2(x,y) = xy - \frac{135}{116}(x^2y - 1)$

$g_3(x,y) = y - \frac{15}{41}(x^2y - 1) - \frac{37}{8}.\left[xy - \frac{135}{116}(x^2y - 1)\right]$

Déterminons la base orthonormale $B' = \{g_1', g_2', g_3'\}$

Partant des composantes fonctions de la famille orthogonale ; suivons les étapes ci-après :

- **Normes**

$\|g_1\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = \frac{29}{45}$, et $\|g_1\|_{BL^1(\Omega)} = \sqrt{\frac{29}{45}}$

$\|g_2\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = \frac{96}{464} = \frac{1}{4{,}83}$, $\|g_2\|_{BL^1(\Omega)} = \sqrt{\frac{96}{464}}$

Norme de g_3

A ce niveau, une vérification est nécessaire. On sait que par construction g_3 est orthogonal à g_1 et g_2. Ainsi, sa norme se calcule directement comme suit :

$$\|g_3\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = \|f_3\|^2{}_{BL^1(\Omega)} - \frac{\langle f_3,g_1\rangle^2{}_{BL^1(\Omega)}}{\|g_1\|^2{}_{BL^1(\Omega)}} - \frac{\langle f_3,g_2\rangle^2{}_{BL^1(\Omega)}}{\|g_2\|^2{}_{BL^1(\Omega)}}$$

- $\|f_3\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = 1$
- $\langle f_3, g_1\rangle_{BL^1(\Omega)} = \frac{1}{3}$, $\|g_1\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = \frac{29}{45} \Longrightarrow \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{29}{45}} = \frac{1}{9}.\frac{45}{29} = \frac{5}{29}$
- $\langle f_3, g_2\rangle_{BL^1(\Omega)} = \frac{37}{164}$, $\|g_2\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = \frac{96}{464} = \frac{1}{4{,}83}$

Le rapport : $\frac{\left(\frac{37}{164}\right)^2}{\frac{96}{464}} = \frac{1369}{26896}.\frac{464}{96} = \frac{635216}{2582016}$

En outre : $\|g_3\|^2{}_{BL^1(\Omega)} = 1 - \frac{5}{29} - \frac{635216}{2582016}$

On peut simplifier cette fraction, mais observons qu'elle reste positive très petite ($\simeq 0{,}581$)

Finalement, on obtient la base orthonormale aisément comme suit :

Définissons : $g_i{}' = \frac{g_i}{\|g_i\|_{BL^1(\Omega)}}$ avec $i = 1,2,3$

D'où : $g_1{}'(x,y) = \frac{x^2y-1}{\sqrt{\frac{29}{45}}}$

$$g_2{}'(x,y) = \frac{xy \quad \frac{135}{116}(x^2y-1)}{\sqrt{\frac{96}{464}}}$$

$$g_3{}'(x,y) = \frac{y-\frac{15}{41}(x^2y-1)-\frac{37}{8}\left[xy-\frac{135}{116}(x^2y-1)\right]}{\sqrt{1-\frac{5}{29}-\frac{635216}{2582016}}}$$

Conclusion

L'étude de l'espace de Beppo Levi d'ordre un, noté $BL^{\,1}(\Omega)$, révèle une structure mathématique riche et fine, essentielle pour l'analyse fonctionnelle. En intégrant à la fois la régularité des fonctions et l'intégrabilité de leurs dérivées, cet espace ouvre la voie à des applications variées, notamment la résolution d'équations aux dérivées partielles. L'orthogonalisation de Gram-Schmidt dans ce cadre permet de construire des bases orthonormales, facilitant ainsi l'analyse des propriétés des fonctions au sein de cet espace.

Nous avons présenté à travers la construction de base hilbertienne que que $\left(BL^1(\Omega, \langle .,. \rangle_{BL^1(\Omega)}\right)$ forme un espace de Hilbert, ce qui souligne l'importance des propriétés d'orthogonalité et d'indépendance linéaire des fonctions. En explorant des exemples spécifiques, nous avons appliqué le procédé d'orthonormalisation, illustrant concrètement comment des bases orthonormales peuvent être extraites de bases existantes.

L'algorithme de Gram-Schmidt s'avère particulièrement utile, non seulement pour renforcer notre compréhension théorique, mais également pour son application pratique dans des contextes variés de l'analyse numérique et fonctionnelle.

En somme, l'espace de Beppo Levi d'ordre un constitue un outil puissant pour l'étude des problèmes complexes en analyse fonctionnelle, et son exploration continue promet de dévoiler encore davantage de résultats enrichissants. Ce travail souligne l'importance de la théorie fonctionnelle moderne et son application dans divers domaines mathématiques, ouvrant ainsi de nouvelles pistes de recherche et d'application en informatique à travers l'implémentation dans les sciences de l'ingénieur.

REFERENCES

[1]. Adams, R. A., & Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev Spaces* (2nd ed., Vol. 140). Academic Press.

[2]. Adams, R. A., & Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev Spaces* (2nd ed.). Elsevier.

[3]. Ambrosio, L., Ikonen, T., Lučić, D., & Pasqualetto, E. (2024). Metric Sobolev Spaces I: Equivalence of Definitions. *Milan Journal of Mathematics, 92*, 255–347. https://doi.org/10.1007/s00032-024-00384-7

[4]. Arcangéli, R., & Torrens, J. J. (2014). Sampling inequalities in Sobolev spaces. *Journal of Approximation Theory*. https://doi.org/10.1016/j.jat.2014.03.007

[5]. Bielich, D., Langou, J., Thomas, S., Swirydowicz, K., Yamazaki, I., & Boman, E. G. (2021). *Low-Synch Gram-Schmidt with Delayed Reorthogonalization for Krylov Solvers* (arXiv:2104.01253). arXiv. https://arxiv.org/abs/2104.01253

[6]. Cross, R. M., & Buccola, S. T. (2024). Causal Orthogonalization: Multicollinearity, Economic Interpretability, and the Gram-Schmidt Process. *arXiv preprint arXiv:2402.17103*.

[7]. Deng, Y. (2023). On *p*-adic Gram-Schmidt Orthogonalization Process. *arXiv preprint arXiv:2305.07886*.

[8]. Duran, A. J., & Marcellán, F. (2005). *Orthogonal polynomials of Chebyshev and Sobolev*. Orthogonal Polynomials on the Sierpinski Gasket.

[9]. Emilien Loranu L. et all. (2025), *Design and Implementation of the Gram-Schmidt Orthogonalization Process in the Sobolev Space* $H^1(\Omega)$. Journal of Advances in Mathematics and Computer Science, Volume 40, Issue 6, Page 107-122, 2025; Articleno.JAMCS.134356 *ISSN: 2456-9968.*

[10]. Evans, L. C. (2010). *Partial Differential Equations* (2nd ed.). AMS.*; J. Adv. Math. Com. Sci., vol. 40, no. 6, pp. 107-122, 2025; Article no.JAMCS.134356*

[11]. Götz, T., & Huber, M. (2018). Gram-Schmidt processes in Sobolev spaces: A comprehensive review. *Advances in Computational Mathematics, 44*(5), 1231–1256. https://doi.org/10.1007/s10444-018-9590-2

[12]. Khan Academy. (2021). *Practical example of the Gram-Schmidt process* [Video]. YouTube.

[13]. Marcellán, F. (2016). *Orthogonal Sobolev Polynomials and Boundary Conditions*. Complutense University of Madrid.

[14]. Meyer, J., & Stewart, R. (2023). On the design of efficient orthogonalization algorithms in Sobolev spaces. *Numerical Linear Algebra with Applications, 30*(4), 581–599. https://doi.org/10.1002/nla.2432

[15]. Mulholland, J. (2020). *Gram-Schmidt Orthogonalization with Python*. SFU Python for Math.

[16]. Okazaki, H. (2023). On the Formalization of Gram-Schmidt Process for Orthonormalizing a Set of Vectors. *Formalized Mathematics, 31*(1), 53–57. https://doi.org/10.2478/forma-2023-0006

[17]. Schilling, N., Nachtergaele, B., & Lankham, I. (2022). *The Gram-Schmidt orthogonalization procedure*. *Linear Algebra – LibreTexts*.