

Modélisation Numérique Du Tissu De Fibre De Carbone Comme Element De Renfort Sur Une Poutre

Avo A.S^{1,2}, V.Razafinjato^{0,2,3,4}, J.L.RAKOTOMALALA^{0,2,3,4}

⁰ Professeur titulaire-Enseignant chercheur

¹ Thesar 3eme annee au sein de l'INGE

² Faculté doctorale : Ingénierie et Géoscience (INGE)

³ Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo (ESPA)

⁴ Institut Supérieur de Technologie d'Antananarivo (IST)



Résumé — Le tissu en fibre de carbone (TFC) présente un fort potentiel en traction qui mérite d'être exploité, d'où notre intérêt de l'utiliser dans le domaine de l'ingénierie des structures de bâtiment. Dans cet article, nous réalisons la simulation du travail du TFC en tant qu'élément de renfort des poutres. Les fondements et les lois de la mécanique des solides déformables avec la méthode des éléments finis nous permettent de sortir un langage plus mathématisé du problème. Ce dernier est exploité en vue d'être traduit en script sur le logiciel matlab pour être ensuite modélisé numériquement. Les résultats obtenus à l'aide d'une cartographie de contrainte et déplacement, décrivent le comportement du tissu lorsque la charge est appliquée. Aussi, les résultats fournis par cette étude nous renseignent sur la performance du tissu de fibre de carbone en tant que matériau de renfort.

Mots clés—Modelisation ; Fibre ; Carbone; Structure; Traction.

I. INTRODUCTION

Le tissu de fibre de carbone, que nous abrégons par TFC dans cet article, est très connu comme élément de renfort des matériaux composites [2] [4]. Son rôle principal est de conférer une tenue de rigidité avec une bonne résistance à la rupture du matériau auquel il en est le composant [2][3][5]. Notre recherche met l'accent sur la simulation numérique du comportement du TFC dans le cas d'un travail d'étirement de celui-ci. L'objectif final est de déterminer les limites du TFC en terme de résistance élastique lorsqu'il est utilisé dans le domaine du génie civil. L'étude que nous abordons reste dans un cadre analytique et est basé sur les fondements théoriques solides comme la méthode des éléments finis et la mécanique des solides déformables [6][8][12].

Le TFC est facilement déformable avec le moindre effort. Il est facilement maniable et ne fournit aucune résistance au froissement [3] ; ce qui le rend complexe à un certain niveau de l'étude. La simulation que nous entreprenons prend le cas où le tissu est en mode d'étirement. Par conséquent, nous considérons le cas où le TFC est collé au niveau de l'arase inférieure d'une poutre et positionné au milieu. En effet, à cette endroit se trouve la fibre tendue de la poutre d'où le TFC collé sera aussi étiré (figure 4). Cette configuration a été expressément choisie pour simuler le cas plus rapproché du système envisagé pour le TFC. Sa rupture à la traction dépendra de la nature des composants qui entre dans sa confection industrielle.

Le TFC est une catégorie de tissu constitué d'une série entrelacement de fibre continue noyée dans une matrice [2][6]. La structure du TFC comprend la chaîne, désignant les fils dans le sens de la longueur, et la trame désignant les fils dans la direction perpendiculaire [2][6]. Les tissus peuvent se présenter comme le roving ou le mat. Le roving est la combinaison de plusieurs mèches filamenteuses groupées dans la même direction. Le mat quant à lui est un tissu formé à partir d'une concentration de fil discontinu sans orientation privilégiée [2].

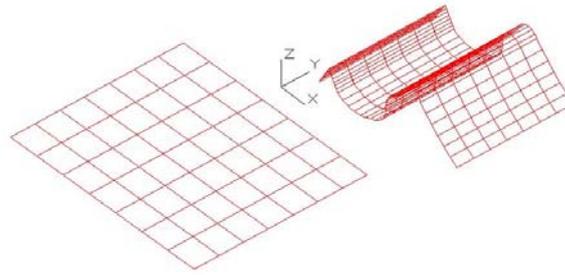


Figure 1: modele numérique du tissu

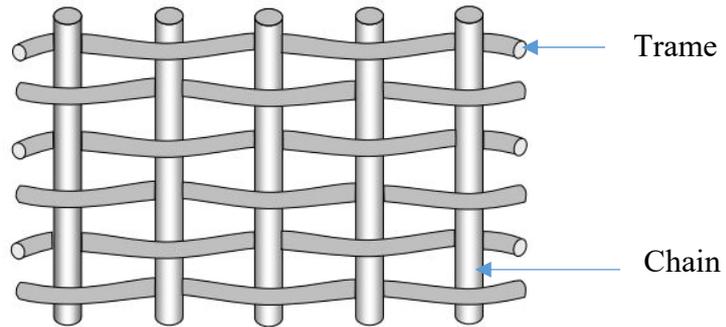


Figure 2: Chaîne et trame d'un tissu

II. METHODOLOGIE ET DEMARCHE DE L'ETUDE

- Description du système :

Soit une poutre de longueur L de section $b \times h$ dont laquelle on soumet une charge q répartie sur toute l'arase supérieure $b \times L$ (figure 3). Lorsque la charge est appliquée, la section la plus fléchie se trouve à sa mi-portée. On suppose un collage parfait du TFC au niveau de cette mi-portée à l'arase inférieure de la poutre. L'objectif étant de développer un travail de traction sur le TFC (figure 4) sous la flexion de la poutre.

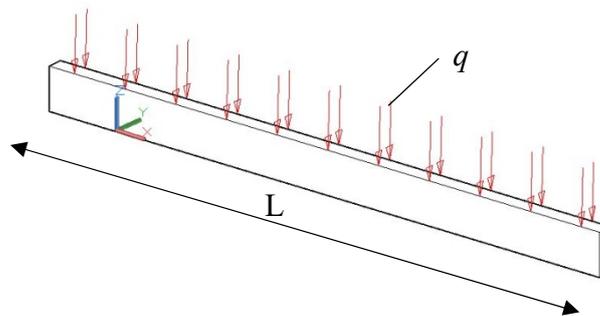


Figure 3: Modèle de base du système

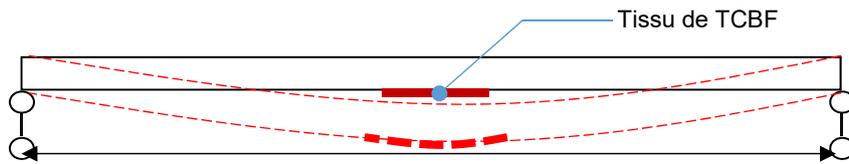


Figure 4: Schématisation du système créant le travail de traction au niveau de l'arase inferieure de la poutre

▪ Développement et expression analytique :

La figure ici-bas représente le TFC placé à l'arase inferieure de la poutre à sa mi-portée. Notre étude se concentre sur cette portion du tissu de dimension $b \times dx$ dont l'objectif d'établir la formulation de l'équation gouvernante du problème. Comme nous sommes dans le contexte d'un corps déformable, nous introduisons la relation fondamentale de la dynamique qui attribue l'égalité entre la somme des forces extérieures F et le produit de la masse volumique du corps par l'accélération : $\sum F = m \cdot \ddot{a}$ (1) [8][9][12].

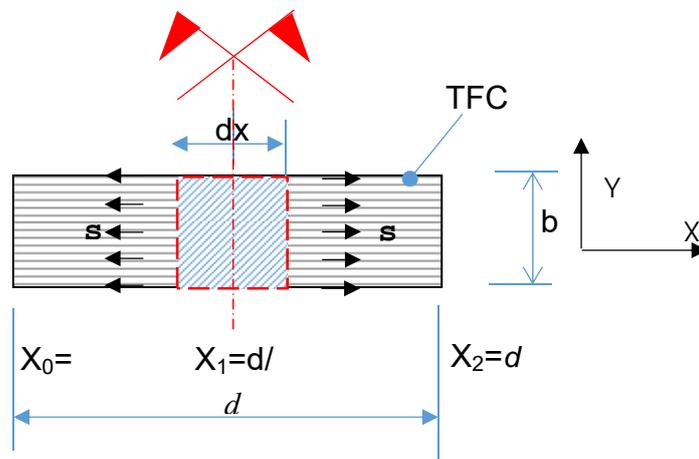


Figure 5: modèle de la contrainte de traction développée sur le tissu de fibre

Ou F peut être formulé ainsi : $F = f \cdot b = n \cdot \sigma \cdot b \cdot e$ (2). A la base de la configuration ci-dessous f désigne la charge linéaire uniformément répartie par unité mesure sur toute la largeur b [8][12]

- n : nombre de couche de tissu
- e : épaisseur du tissu
- b : largeur de la poutre
- s : contrainte de traction transmise sur le tissu

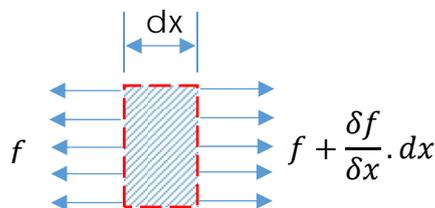


Figure 6: Configuration infinitesimal

Sachant que : $\ddot{a} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ qui n'est autre que l'accélération (dérivée 2^{ème} du déplacement u), l'équation (1) devient :

$$\frac{\delta f}{\delta x} \cdot dx = \rho \cdot S \cdot \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} dx(4)$$

Nous insérons la loi de comportement élastique de Hooke $s=E \cdot \epsilon$ et nous réécrivons l'expression (4) par :

$$\frac{\delta}{\delta x} \left[E \cdot S \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \right] dx = \rho \cdot S \cdot \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} dx(5)$$

- Equation gouvernante du problème :

De l'équation (5) nous écrivons l'équation qui régit le problème d'élasticité du tissu de fibre :

$$A(u) = \frac{\delta}{\delta x} \left[E \cdot S \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \right] dx - \rho \cdot S \cdot \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} dx(6)$$

Dans le langage de la méthode des éléments finis, nous parlons de « Equation gouvernante » [11][12].

Nous restons dans le domaine linéaire et plus particulièrement dans un stade où le déchirement du tissu n'est pas atteint.

- Formulation variationnelle :

Soit la formulation forte obtenue en faisant intervenir la fonction poids w [10][11][12]:

$$\int_0^{d/2} \varpi \cdot A(u) = \int_0^{d/2} \varpi \cdot \left(\frac{\delta}{\delta x} \left[E \cdot S \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \right] - \rho \cdot S \cdot \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} \right) dx = 0(7)$$

La fonction de Dirac : $w = \delta u$ traduit le contexte de perturbation du système. L'équation (7) devient :

$$\int_0^{d/2} \delta u \cdot \left(\frac{\delta}{\delta x} \left[E \cdot S \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \right] - \rho \cdot S \cdot \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} \right) dx = 0(8)$$

$$\int_0^{d/2} \delta u \cdot \left(\frac{\delta}{\delta x} \left[E \cdot S \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \right] \right) dx - \int_0^{d/2} \delta u \cdot \rho \cdot S \cdot \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} \cdot dx = 0(9)$$

En appliquant l'intégration par partie de $\int_0^{d/2} \delta u \cdot \left(\frac{\delta}{\delta x} \left[E \cdot S \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \right] \right) dx$ (1^{er} terme de l'équation (9)), nous obtenons la formulation faible de (9) :

$$\int_0^{d/2} \delta \frac{\partial u}{\partial x} E \cdot S \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx - \left[\delta u \cdot E \cdot S \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^{d/2} + \int_0^{d/2} \delta u \cdot \rho \cdot S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx(10)$$

- Discretisation et fonction de forme :

Nous ramenons le problème a un contexte monodimensionnel étant donné que le sens d'application des contraintes est dans l'axe de x (sens de portée de la poutre) [10][11][12].

n est le nombre d'élément pour la discrétisation dans le sens de la longueur.

u est le déplacement en fonction de x , la fonction solution recherchée.

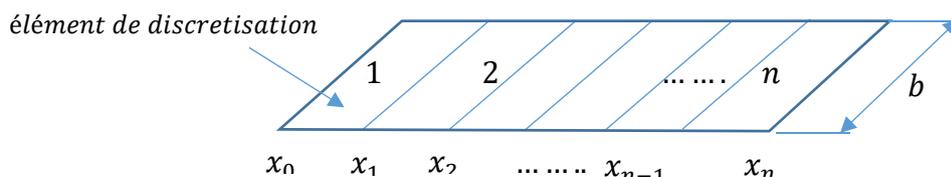


Figure 7: Schématisation du modèle de discrétisation

Par interpolation linéaire de chaque élément de discrétisation nous trouvons

$$\text{Elément 1} : u_1 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Elément 2} : u_2 = (x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Elément 3} : u_3 = (x_3 \ x_4) \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

.....

$$\text{Elément n} : u_n = (x_{n-1} \ x_n) \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad (11)$$

Nous obtenons ainsi la forme condensée : $u_n = \xi_n a_n$

Dans sa forme matricielle nous avons :

$$\text{Elément 1} : \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Elément 2} : \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Elément 3} : \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

.....

$$\text{Elément n} : \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_n \\ 1 & x_{n+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

- Fonction de forme N :

A partir de la forme condensée, nous écrivons sa forme inverse : $a_n = \xi_n^{-1} \cdot u_n$.

$$\text{D'où nous pouvons écrire } \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \quad (12)$$

En introduisant (12) dans (11) pour chaque élément, on a :

$$u = (x_{n-1} \ x_n) \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \begin{bmatrix} x_n & -x_{n-1} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} \frac{x_n - x}{x_n - x_{n-1}} & \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

Nous sortons ainsi la fonction de forme N

$$N(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_n - x}{x_n - x_{n-1}} & \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \end{bmatrix}$$

- Reformulation de la formulation faible avec l'insertion de la fonction de forme N :

En ayant obtenu la fonction de forme N, nous l'insérons dans l'équation exprimant la formulation faible déjà

$$\text{déterminé un plus haut : } \int_0^{d/2} \delta \frac{\partial u}{\partial x} E \cdot S \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx - \left[\delta u \cdot E \cdot S \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^{d/2} + \int_0^{d/2} \delta u \cdot \rho \cdot S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$$

Par développement :

$$\int_0^{d/2} \left[(\delta u_0 \quad \delta u_{d/2}) \begin{pmatrix} -\frac{1}{d/2} \\ \frac{1}{d/2} \end{pmatrix} \cdot E.S. \begin{pmatrix} -\frac{1}{d/2} & \frac{1}{d/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_{d/2} \end{pmatrix} \cdot dx \right] + \int_0^{d/2} (\delta u_0 \quad \delta u_{\frac{d}{2}}) \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{\frac{d}{2}} \\ \frac{x}{\frac{d}{2}} \end{pmatrix} \cdot \rho.S. \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{d/2} & \frac{x}{d/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0'' \\ u_{d/2}'' \end{pmatrix} dx - \left[(\delta u_0 \quad \delta u_{d/2}) \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{d/2} \\ \frac{x}{d/2} \end{pmatrix} \cdot E.S. \begin{pmatrix} -\frac{1}{d/2} & \frac{1}{d/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_{d/2} \end{pmatrix} \right]_0^{d/2} = 0 \quad (13)$$

En poursuivant le développement de (13) nous obtenons l'expression qui définit les forces appliquées aux extrémités du tissu :

$$\int_0^{d/2} \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{d/2} \\ \frac{1}{d/2} \end{pmatrix} \cdot E.S. \begin{pmatrix} -\frac{1}{d/2} & \frac{1}{d/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_{d/2} \end{pmatrix} \cdot dx \right] + \int_0^{d/2} \left[\begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{d/2} \\ \frac{x}{d/2} \end{pmatrix} \cdot \rho.S. \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{d/2} & \frac{x}{d/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0'' \\ u_{d/2}'' \end{pmatrix} dx \right] = \begin{pmatrix} -f_0 \\ f_{d/2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

- Ecriture du script sur Matlab :

La partie suivante traduit le contexte analytique formulé précédemment par un langage codé sur le logiciel MATLAB. [7][10]

Fiber carbon simulation test

```
length 50 cm
width 20 cm
tensile strength 1 760 Mpa
Young modulus 130 Gpa
Loading test : 1 T/m2
```

Modeling structure

```
model=createpde("structural","static-solid")
importGeometry(model,"TCBF.stl")
figure
pdeplot(model,"FaceLabels","on")
title('tcbf')
structuralProperties(model,"Cell",1,"YoungsModulus",130000,"MassDensity",0.190,"PoissonsRatio",0.2)
```

Discretation

```
tcbf_thickness=2e-2
generateMesh(model,"Hmax",tcbf_thickness);
pdeplot3D(model);
title('discretetcbf')
```

Setting load and solving equation

```
structuralBC(model,"Face",[9 10 7 12],"Constraint","fixed")
```

```
distributedload=1
structuralBoundaryLoad(model,"Face",[1 6],"SurfaceTraction",[distributedload;0;0])
result=solve(model)
minUz=min(result.Displacement.x)
pdeplot3D(model,"ColorMapData",result.Displacement.x);
figure
pdeplot3D(model,"ColorMapData",result.VonMisesStress,"Deformation",result.Displacement)
title('tcbf stress simulation')
```

III. RESULTAT ET DISCUSSION

Dans cette partie, nous exposons les résultats de la démarche pour la résolution du problème de l'équation aux dérivées partielles (PDE) sur MATLAB. Nous établissons ici la simulation numérique du problème dans le but de sortir la cartographie des contraintes et des déformations.

- Maillage du tissu :

```
FEMesh with properties:
Nodes: [3×4681 double]
Elements: [10×2224 double]
MaxElementSize: 0.0200
MinElementSize: 0.0100
MeshGradation: 1.5000
GeometricOrder: 'quadratic'
```

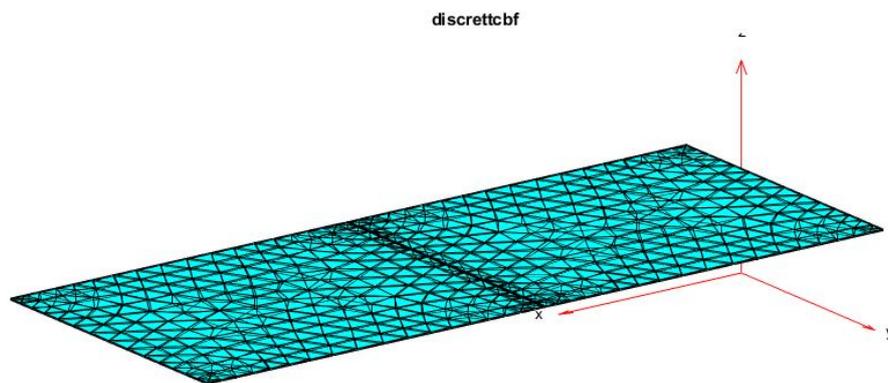


Figure 8:Maillage du tissu

- Cartographie des contraintes de traction dans le tissu [unité en Mpa] :

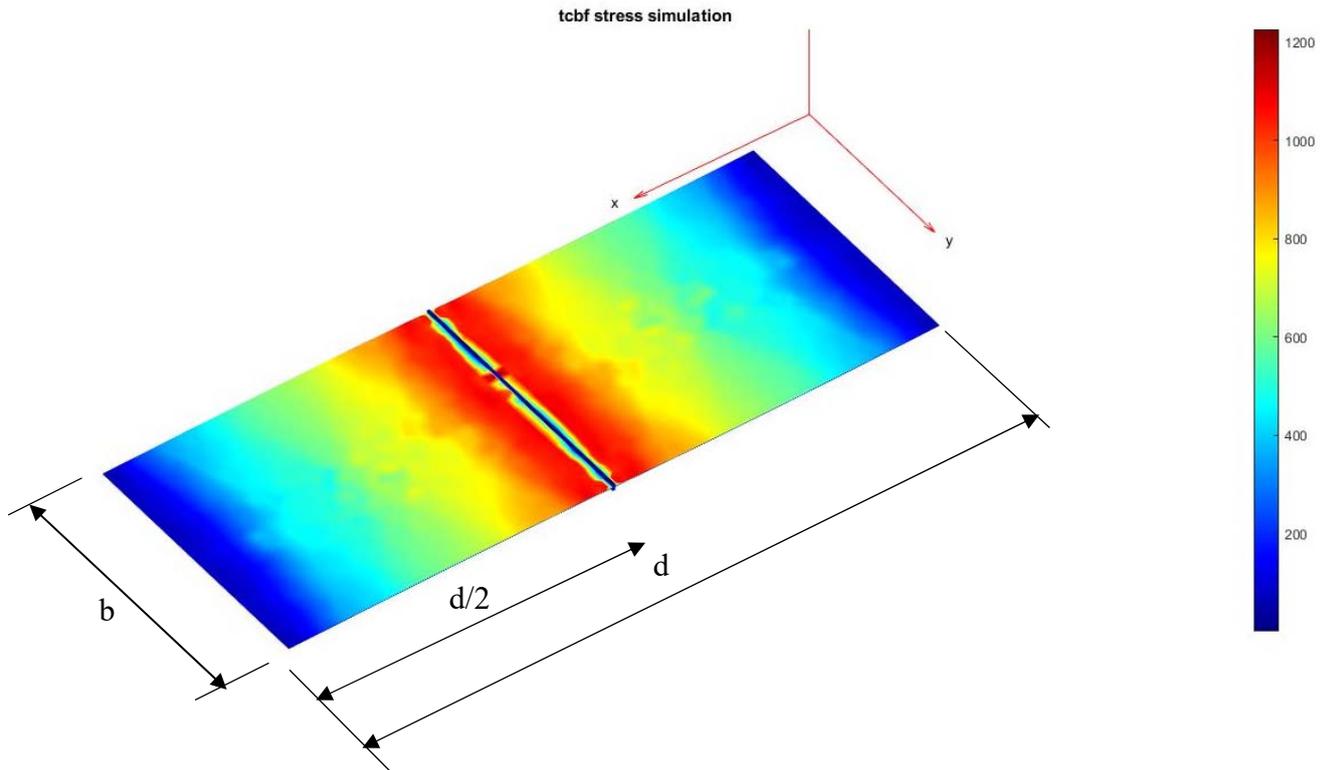


Figure 9: Cartographie des contraintes développées dans le tissu

La cartographie des contraintes ci-haut montre une forte concentration de contrainte dans la zone du milieu du tissu [couleur rouge accentuée] de l'ordre de 1 000 Mpa à 1 200 Mpa. Par conséquent la tendance de la déchirure du tissu se produit dans cette zone. Elle s'atténue graduellement jusqu'aux extrémités [couleur bleu marine]. Sachant que la limite d'élasticité du tissu de fibre que nous avons choisi pour cette simulation est de 1 760 Mpa, on conclut un taux de travail de 60% pour la charge donnée.

La tendance à la déchirure génère une extension du tissu de fibre au niveau de la zone du milieu. La cartographie de la figure 9 enregistre une valeur maximum du déplacement de l'ordre de 1,1 mm au niveau du bord extrême et s'atténue au niveau de la zone du milieu.

En effet, les résultats présentés par ces 2 cartographies (figure 8 et 9) s'expliquent du fait que dans notre simulation, nous avons placé le tissu de fibre à mi-portée de la poutre, là où le moment de flexion est maximum. La contrainte de flexion au niveau de l'arase inférieure de la poutre est donc transmise sur le tissu sous la forme de traction (voir figure 4).

- Cartographie des déplacements [unité en m] :

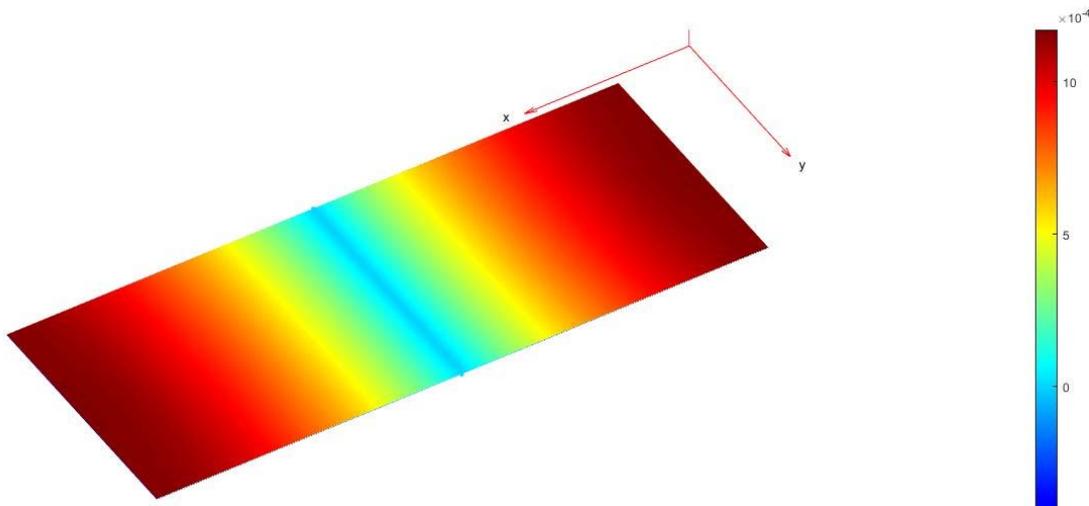


Figure 10: Cartographie de déplacement

A la base de la tendance actuelle en matière de design architectural, les concepteurs proposent moins de poteau structurel pour offrir plus d'espace à l'intérieur du bâtiment. En conséquence, les poutres travaillent plus en encaissant les effets de flexion. A la base de ce contexte et au vu de notre simulation, nous pouvons envisager de faire participer le TFC à la reprise des grandes contraintes de flexion dans le cas des poutres de très longues portées. Cette initiative permettra donc de jouer sur les quantités d'acier à insérer dans le béton, ou même diminuer la section tout en respectant les critères de tolérance pour des poutres en flexion.

IV. CONCLUSION

Le TFC constitue un matériau apte à travailler en tant qu'élément qui encaisse la traction. Les résultats exposés dans cet article nous révèlent le potentiel mécanique de ce matériau. Il peut être utilisé dans le contexte de renforcement des éléments structurels ainsi qu'à l'optimisation de leur dimension. Grâce à cette étude, nous pouvons apprécier la capacité des fibres à contribuer à la reprise des contraintes de traction développées dans les poutres. L'ordre des valeurs de la répartition des contraintes dans le tissu (figure 8) propose des indicateurs intéressants et exploitables dans le domaine de l'ingénierie.

REFERENCES

- [1] T.Pallin-luc, Mécanique des Solides Déformables, Art et Métiers ParisTech. 2007
- [2] J.M. Berthelot, Mécanique des matériaux et structures composites, Institut Supérieur des Matériaux et Mécanique avancés.
- [3] S Pommier, Mécanique des Matériaux. Université Paris-Saclay, 2011.
- [4] L.GORNET, Généralités sur les Matériaux composites, Centrales Nantes. 2008
- [5] D. Vakili Ahmad, Z. Yue, Low Cost Carbon Fiber Technology Development for Carbon Fiber Composite Applications, The University of Tennessee Space Institute. 2012
- [6] J.Charles Craveur, Modélisation par Éléments Finis, 3eme éd. Dunod.2008
- [7] A. Quarteroni / F. SALERI / P. GERVASIO, Calcul scientifique sur Matlab 2eme édition. Springer, 2010
- [8] R.Fortunier. Mécanique des Milieux Continus – Elasticité, ENSM-SE. 2004
- [9] J. Garrigues. Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus, Centrale Marseille. 2018.

- [10] F. Boyer, Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles. Université Paul Sabatier - Toulouse 3. 2016
- [11] A. Fortin, André Garon. Les éléments finis de la théorie à la pratique, 2017
- [12] Abdelghani SEGHIR. Méthode des éléments finis. Université Abderrahmane Mira – Bejai. 2014