

Simulation Numérique De L'écoulement D'eau Dans Une Couche Du Stipe De Bismarckia Nobilis « Satrambe »

Numerical Simulation Of Water Flow In A Layer Of The Stipe Of Bismarckia Nobilis "Satrambe"

Jaonarana Eric ^{1,2}, Velomanantsoa Gabriely Ranaivoniarivo², Rija Lalaina Rakotosaona², Rafanomezantsoa Tsiriniaina Martin Antoine³

¹ Université de Mahajanga, Unité de Formation et de Recherche en Sciences Sociales (UFRSS) de Mandritsara de la Région SOFIA

² Université d'Antananarivo, Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo, Mention Science et Ingénierie des Matériaux, BP 1500 Antananarivo, 101 Madagascar

³ Université d'Antananarivo Laboratoire Dynamique de l'Atmosphère, de climat et des océans (DYACO), Faculté des sciences



Résumé— Cet article consiste à présenter un modèle numérique de l'écoulement d'eau à travers un milieu poreux rigide de la couche du stipe *Bismarckia Nobilis* « Satrambe ». Ce modèle est obtenu par la simulation numérique de l'équation de conservation en combinant avec la loi de Darcy. L'intérêt de ce présent travail c'est de trouver l'évolution spatio-temporelle de la teneur en eau θ à l'intérieure de la couche de stipe de *Bismarckia nobilis*. et de voir leur comportement hygroscopique.

Mots clés— modèle numérique- *Bismarckia Nobilis*- loi de Darcy- teneur en eau- « Free Fem++ »

Abstract— The purpose of this paper is to present a numerical model of water flow through a rigid porous medium of the *Bismarckia Nobilis* "Satrambe" stipe layer. This module is obtained by numerical simulation of the conservation equation by combining with Darcy's law. The interest of this present work is to find the spatiotemporal evolution of proportion of water θ inside the stipe layer of *Bismarckia nobilis* and to see their hygroscopic behavior.

Keywords— numerical model- *Bismarckia Nobilis*- Darcy's law- water content- « Free Fem++ »

I. INTRODUCTION

Dans cet article nous allons, après avoir décrit le modèle physique, dériver un modèle mathématique [1]. La loi physique utilisée est la conservation de la masse. On suppose que le fluide à travers le milieu suit la loi de Darcy.

Le problème que l'on se pose est le suivant, on se donne un domaine borné (un cylindre de rayon 1 et de hauteur 1 contenant une couche de stipe de *Bismarckia nobilis* non saturé de teneur en eau initiale θ_r). On injecte dans ce milieu poreux à travers le sommet une quantité d'eau et on regarde l'évolution spatio-temporelle de la teneur du traceur dans le domaine. La propagation de l'écoulement du fluide nécessite la connaissance des équations gouvernant ce phénomène en milieu poreux [2]. Dans ce modèle

physique, on suppose qu'il n'y a pas d'écoulement latéral. Le fond est ouvert et le débit de la source extérieure n'est pas élevé pour éviter d'avoir un écoulement diphasique.

L'étude se fait dans un intervalle de temps tel que le front d'humectation n'atteint pas le fond. Cette hypothèse nous permet de simplifier le problème en évitant de se confronter à un autre type de problème à frontière libre où la variation du niveau de la nappe phréatique est non négligeable. On utilise la couche du stipe de Bismarckia Nobilis qui peut être supposé comme un milieu poreux rigide.

A-Nomenclature

θ : la teneur en eau ;

ρ : la masse volumique de l'eau ;

v : la vitesse de filtration ;

$q = \theta v$: la vitesse de filtration de Darcy ;

ρ_s : Densité de la partie solide du milieu poreux ;

ρ_d : Densité apparente sèche du Bismarckia nobilis ;

f_m : densité de source volumique.

L'écoulement d'eau dans le milieu poreux sera régi par le phénomène décrivant l'écoulement du fluide.

B-Mise en équation

Supposons que le milieu poreux soit le cylindre universel de $\mathbb{R}^3$ noté Ω . Soit ω une partie de Ω , V_ω le volume de ω et $\mathcal{M}(\omega, t)$ la masse de fluide contenue dans ω à l'instant.

Le volume élémentaire de ω sera dV_ω et la portion de volume occupée par le fluide, θdV_ω . De là, on en déduit la masse élémentaire de fluide contenue dans dV_ω .

$$dm = \rho \theta dV_\omega \quad (1)$$

donc

$$\mathcal{M}(\omega, t) = \int_\omega dm = \int_\omega \rho \theta(x, t) dV_\omega \quad (2)$$

Si ω est un volume fixé, la loi de conservation de la masse nous permet d'affirmer que la variation de la masse dans ω par rapport au temps est égale à la somme du flux à travers la surface $\partial\omega$ et des sources dans ω . Ceci se traduit par l'équation

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}(\omega, t) = \phi_e - \phi_s + \int_\omega \rho f_m dV_\omega^2$$

En remplaçant $\mathcal{M}$, $\phi_e - \phi_s$ par leur valeur, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_\omega \rho \theta(x, z, t) dV_\omega + \int_{\partial\omega} \rho q \cdot n d\sigma = \rho f_m dV_\omega.$$

Où q la vitesse de filtration et f_m le terme source volumique. La formule de la divergence nous permet d'écrire

$$\int_\omega \frac{\partial \rho \theta}{\partial t} dV_\omega + \int_\omega \operatorname{div}(\rho q) dV_\omega = \int_\omega \rho f_m dV_\omega \quad \forall \omega.$$

Ce qui donne ainsi l'équation d'écoulement :

$$\frac{\partial \rho \theta}{\partial t} + \text{div}(\rho q) = f_m$$

Comme ρ est constante, on obtient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{div}(q) = f_m \quad (2)$$

Où f_m désigne l'apport massique du milieu extérieur. La quantité q est donnée par la loi de Darcy généralisée par Richard [3], [4], [5]:

$$q = -K(\theta) \nabla H(\theta)$$

K étant la conductivité hydraulique, H la charge hydraulique. On a $H(\theta) = h(\theta) + z$ où h désigne le potentiel matriciel et z la cote.

En rapportant cette expression de q dans (2.1), on obtient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \text{div}(K(\theta) \nabla H(\theta)) = f_m$$

Dans cette équation, on a comme inconnues $\theta, K(\theta)$ et $h(\theta)$, ces deux grandeurs constituent les caractéristiques hydrodynamiques du milieu et leurs expressions sont généralement empiriques. Les modèles couramment utilisés sont ceux de Van Genuchten [6], de Brooks et Corey et de Gardner (1958) revu par Russo (1988) ; pour une description de ces modèles, voir [7].

L'expression du modèle de Van Genuchten de $h(\theta)$ est donnée par l'équation :

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} (1 + (ah)^n)^{-m} \quad (3)$$

Où θ_r est la teneur en eau initiale et θ_s est la teneur en eau à saturation.

Les valeurs a, n, m sont des paramètres empiriques.

Dans certains cas au lieu d'utiliser θ comme variable globale, il est préférable de considérer la saturation effective notée $S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$.

Ainsi,

$$h(S_e) = \frac{1}{\alpha} (S_e^{-\frac{1}{m}} - 1)^{\frac{1}{n}}$$

La condition de Mualem nous permet de relier n et m : $m = -\frac{1}{n}$; de même que celui de Burdine : $m = -\frac{2}{n}$.

Van Genuchten fournit aussi l'expression de $K(\theta)$ suivante :

$$K(S_e) = K_{sat} S_e^L \left[1 - \left(1 - S_e^{\frac{L}{m}} \right)^m \right]^2 \quad (4)$$

La valeur L étant un paramètre empirique souvent égal à 0.5. Ce modèle contient cinq paramètres à déterminer : $\theta_s, \theta_r, K_{sat}, n \propto$. Cependant, Brooks et Corey en 1964 avaient proposé le modèle suivant :

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \frac{h_e^\beta}{h} \quad (5)$$

Ce qui est équivalent à :

$$h(\theta) = h_e \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{\frac{-1}{\beta}} \quad (6)$$

avec β paramètre empirique et h_e le potentiel au point d'entrée de l'air.

La conductivité hydraulique est :

$$K(\theta) = K_{sat} S_e^{p+2\beta} \quad (7)$$

Quant à Gardner, il estime que

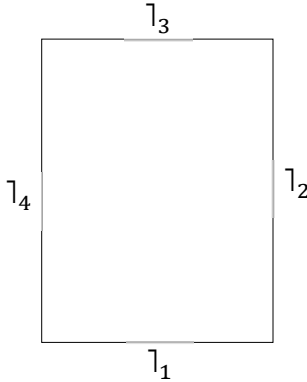
$$K(\theta) = K_{sat} \exp(-a|h|) \quad (8)$$

Avec $a > 0$, paramètre empirique de l'ordre de $\frac{1}{h_e}$. Pour des milieux polydispersés on a $0 < a < \frac{1}{h_e}$. En 1988, Russo obtient à partir de l'expression de Gardner la saturation effective sous la forme :

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[(\exp(-0.5al))(1 + 0.5al) \right]^{\frac{2}{b+2}} \quad (9)$$

Le paramètre β est empirique et souvent égal à 0,5. Dans ce cas, il y a quatre paramètres à déterminer ($\theta_s, \theta_r, h_c, \beta$). Le modèle le plus utilisé par les physiciens des milieux poreux est celui de Van Genuchten et c'est ce dernier que nous étudierons en l'appliquant à l'étude du stipe de *Bismarckia nobilis*.

L'équation se réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \text{div}(k(\theta) \nabla H(\theta)) = f_m \\ q = -K(\theta) \nabla H(\theta) \\ H(\theta) = h(\theta) + z \\ k(\theta) = K_{sat} \exp(-a|h|), a \cong \frac{I}{h_c} \\ h(\theta) = h_c \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{\frac{1}{\beta}} \end{array} \right. \quad (10)$$


$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \Omega = l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4 \\ q(\vec{x}, t) = Q(\vec{x}, t) \text{ sur } l_3 \\ q(\vec{x}, 0) = 0 \text{ sur } \Omega \end{array} \right.$$

II. MATERIELS ET METHODE

2.1. Matériels

1-Matériel biologique

Le palmier *Bismarckia nobilis* (Figure n°01) fait partie des produits forestiers non ligneux (PFNL), il est bien évidemment d'origine biologique autres que le bois, provenant des forêts, d'autres terrains boisés ou provenant d'arbres « hors forêts » [8]. Les herbes géantes *Bismarckia nobilis* « **Satrambe** » présentent plusieurs sous-produits qui sont tous collectés pour différentes nécessités par la population. *Bismarckia nobilis*, connu habituellement sous le nom de « satrambe », est un palmier dioïque de grande taille qui peut atteindre 10 à 20 m de hauteur avec un diamètre moyen de 20 à 30 cm [9]

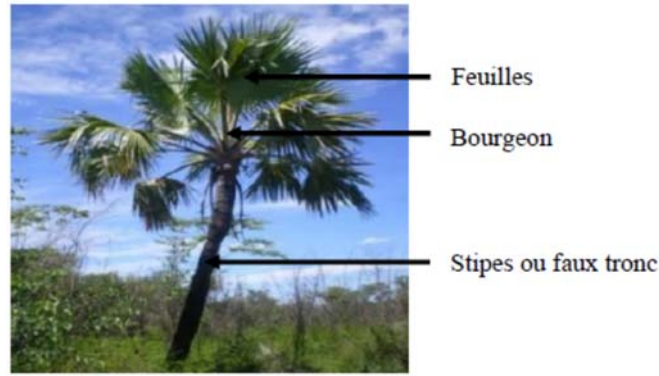


Figure n°01 : Bismarckia nobilis « Satrambe »

2-Matériel numérique

Le logiciel utilisé est « Free Fem++ », c'est un logiciel permettant de résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles, en 2D et en 3D, il s'exécute en ligne de commande. Et permet de créer des maillages en s'appuyant à la théorie de Delaunay.

2.2. Méthode

Pour aboutir aux résultats numériques nous utilisons la méthode des éléments finis, on fait de la pondération par fonction test et on amène l'intégration sur le domaine, la formule devient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} v d\Omega - \int_{\Omega} \text{div}(k(\theta) \nabla H(\theta)) \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} f_m \cdot v d\Omega \quad (11)$$

(avec v fonction test à support compact c'est-à-dire valeur à la frontière nulle)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} v d\Omega + \int_{\Omega} k(\theta) H'(\theta) \nabla \theta \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f_m \cdot v d\Omega$$

Or

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t}$$

Nous obtenons la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega} \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} v d\Omega + \int_{\Omega} K(\theta^{n+1}) H'(\theta^{n+1}) \nabla \theta^{n+1} \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f_m \cdot v d\Omega \quad (12)$$

$$\theta = \sum_{j=1}^N \theta_j \phi_j; v = \phi_i \quad (13)$$

$$\theta = (\theta_j) = (\theta_1, \theta_2), \dots, \theta_N)^T \quad (14)$$

$$\mathbf{M} = (\mathbf{M}_{ij})_{N \times N} = \sum_k (\mathbf{M}_{ij}^k)_{N \times N} \text{ avec } M_{ij}^k = \int_{T_k} \frac{1}{\Delta_f} \phi_i \phi_j dx dy$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{N \times N} = \sum_k (\mathbf{A}_{ij}^k)_{N \times N} \text{ avec } A_{ij}^k = \int_{T_k} K(\phi_j) H'(\phi_j) \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx dy$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_j)_{N \times 1} = \sum_k (\mathbf{F}_i^k)_{N \times 1} \text{ avec } F_1^k = \int_{T_k} f_m \cdot \phi_i dx dy \text{ avec}$$

$$\mathbf{M}(\theta^{n+1} - \theta^n) + \mathbf{A} \theta^{n+1} = \mathbf{F}$$

$$(\mathbf{M} + \mathbf{A}) \theta^{n+1} = \mathbf{F} + \mathbf{M} \theta^n$$

Finalement, nous avons l'écriture matricielle appelée schémas numérique ci-après

$$K \theta^{n+1} = \theta^n \quad (15)$$

III. RESULTATS ET INTERPRETATIONS

Le maillage a pour utilité de ramener un problème continu à un problème discret. La figure n°02 suivante représente le maillage d'ordre 2 que nous avons obtenu avec le « Free Fem++ »

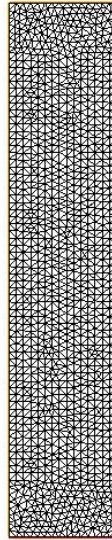


Figure n°02 : Maillage de la Coupe longitudinale du stipe de Bismarckia nobilis à modéliser

Au sein de la modélisation, On a :

$$t_{and} = t_0 + \Delta t \cdot m$$

Avec

t_0 : le temps initial

t_{and} : temps supposé connu dans la modélisation

Δt : Variation de température, ici cette valeur égale à 0,4

m : le temps réel pour la modélisation

Si $t_0 = 0$

$$m = \frac{t_{and}}{\Delta t}$$

En faisant varier le temps « m », et à partir des divers paramètres précédents, nous pouvons présenter les résultats de simulation dans le tableau (n°01) ci-après qui est illustré par la figure 3 correspondante que le logiciel a sortie:

Tableau n°1 : Résultats de simulation

t= 25s	t= 50s	t= 75s	t= 125s	t= 250s	t= 500s
IsoValue -0.0604069 0.0604069 0.181221 0.302035 0.422849 0.543663 0.664476 0.78529 0.906104 1.02692 1.14773 1.26855 1.38936 1.51017 1.63099 1.7518 1.87262 1.99343 2.11424 2.23506	IsoValue -0.120814 0.120814 0.362442 0.604069 0.845697 1.08733 1.32895 1.57058 1.81221 2.05384 2.29546 2.53709 2.77872 3.02035 3.26198 3.5036 3.74523 3.98686 4.22849 4.47011	IsoValue -0.181221 0.181221 0.543663 0.906104 1.26855 1.63099 1.99343 2.35587 2.71831 3.08075 3.4432 3.80564 4.16808 4.53052 4.89296 5.2554 5.61785 5.98029 6.34273 6.70517	IsoValue -0.302035 0.302035 0.906104 1.51017 2.11424 2.71831 3.32238 3.92645 4.53052 5.13459 5.73866 6.34273 6.9468 7.55087 8.15494 8.75901 9.36308 9.96715 10.5712 11.1753	IsoValue -0.604069 0.604069 1.81221 3.02035 4.22849 5.43663 6.64476 7.8529 9.06104 10.2692 11.4773 12.6855 13.8936 15.1017 16.3099 17.518 18.7262 19.9343 21.1424 22.3506	IsoValue -1.20814 1.20814 3.62442 6.04069 8.45697 10.8733 13.2895 15.7058 18.1221 20.5384 22.9546 25.3709 27.7872 30.2035 32.6198 35.036 37.4523 39.8686 42.2849 44.7011

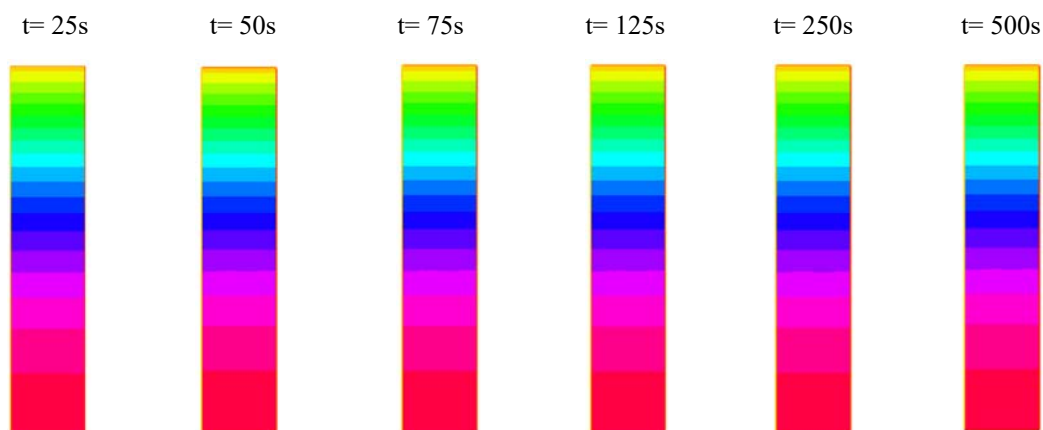


Figure n°03 : Illustration des résultats de simulation

D'après le tableau 01 et la figure n°03, nous voyons bien que la teneur en eau au fond du cylindre augmente en fonction du temps, donc l'eau versée est toujours emmagasinée par le matériau stipe de Bismarckia nobilis (satrambe).

IV. CONCLUSION

Les résultats obtenus par la simulation numérique de l'écoulement d'eau dans une couche du stipe de Bismarckia nobilis « Satrambe » s'accordent bien avec ceux des recherches faites au laboratoire du Génie chimique de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo qui ont montré que le matériau stipe de Bismarckia nobilis (satrambe) a un pourcentage de capacité d'absorption très élevé 89,48% [10], c'est-à-dire que la fibre emmagasine l'eau et sa masse après essais augmente de deux fois de celle d'origine.

En effet la connaissance du caractère hygroscopique du Bismarckia nobilis (satrambe) approuvé par la simulation permet la compréhension du processus de séchage, il faudrait adopter pour le Bismarckia nobilis un mode de séchage qui lui est approprié.

REFERENCES

- [1] Bermúdez A., Mathematical techniques for some environmental problems related to water pollution control, in Environment, Economics and their Mathematical Models, edited by J. I. Diaz J. L. Lions, Masson, (1994).

- [2] Coussy O., Mécanique des milieux poreux, Edition Technip, (1991).
- [3] Montmollin G. De, Méthode STILS pour l'équation de transport : comparaisons et analyses. Etude d'un modèle de fermeture pour la loi de Darcy, Thèse présentée à l'Université de Neuchâtel Suisse (2001).
- [4] Soulève kane, analyse mathématique et simulation numérique de modèles d'écoulement de fluides incompressibles en surface libre et milieu poreux déformable, THÈSE présentée à la faculté des sciences, pour obtenir le grade de docteur ès sciences de l'Université de Neu Châtel Institut de Mathématiques, 2005
- [5] Besson O., Montmollin G., Space-Time Integrated Least Squares : a time-marching approach, Int. J. Numer. Meth. Fluid., 44, 525-543, (2004).
- [6] Van Genuchten M. T., Sisson J.B., Estimation of hydraulic conductivity without computing uxes ; Proc. Int. Workshop, Indirect Methods for Estimating the Hydraulic Properties of Unsaturated Soil., University of California, Riverside, 665-674, (1992).
- [7] Garnier P., Détermination des caractéristiques hydrodynamiques des sols déformables par la méthode inverse, Thèse, ORSTOM, (1996)
- [8] Kent, J., 2000, Biodiversity hotspots for conservation priorities, Nature, vol.403. pp: 853-858.
- [9] Tomboanona Sylvana 2019, ethnopalmes de madagascar, ethnoecologie et regeneration : cas d'analalava, antsanitia et antrema, thèse de doctorat de l'Ecole Doctorale Ecosystèmes Naturels (EDEN) de l' Université de Mahajanga
- [10] Jaonarana Eric., 2014.Etude et fabrication des Matériaux de construction à partir d'une plante fibreuse, le satrambe des régions côte Ouest de Madagascar. Mémoire de DEA Science des matériaux Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo,145p