

Coefficients Triangulaires et Algèbre des Polynômes Dissociables et Multipliables

Falimanana RANDIMBINDRAINIBE¹, Toky Basilide RAVALIMINOARIMALALASON²

Ecole doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation
Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo - Université d'Antananarivo - Madagascar



Résumé – Le but de cet article est de construire une suite de polynômes spéciaux appelés polynômes triangulaires dissociables et polynômes triangulaires multipliables et d'étudier leurs propriétés et leurs spécificités. Pour cela on va utiliser le coefficient binomial de Newton (coefficient binomial usuel) noté $\binom{n}{m}$, $0 \leq m \leq n$, avec $m, n \in \mathbb{N}$, le coefficient binomial de Gauss $\binom{n}{m}_\theta$ avec $m, n \in \mathbb{N}$, de paramètre θ et construire des coefficients spéciaux notés $A_k^{n,m}$, appelés coefficients triangulaires, que l'on ne va pas confondre avec le coefficient trinomial. On utilisera les relations d'orthogonalité pour obtenir des propriétés des coefficients triangulaires et des critères de triangularité dissociable et multipliable.

Mots-clés – Coefficients binomiaux, coefficients triangulaires, relation d'orthogonalité, triangulaire dissociable, triangulaire multipliable, coefficients triangulaires non dégénérés, système unitaire.

I. LES COEFFICIENTS BINOMIAUX

Soit $\mathcal{K}$ un corps commutatif arbitraire.

a. Coefficient binomial de Newton

On appelle coefficient binomial de Newton le coefficient noté $\binom{n}{m}$, $0 \leq m \leq n$, avec $m, n \in \mathbb{N}$, défini par la relation de récurrence [1] [2] [3] [4].

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}, m \geq 1 \quad (1)$$

Dans le cas, où $\text{char } \mathcal{K} = 0$, on a

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad 0 \leq m \leq n, \quad (2)$$

Dans le cas, où $\text{char } \mathcal{K} = p$, nombre premier, on définit les coefficients binomiaux par la relation de récurrence (1), de plus on pose $\binom{n}{m} = 0$ pour $n < m$, $n < 0$ ou $m < 0$. La représentation (2) a lieu seulement pour $0 \leq m \leq n < p = \text{char } \mathcal{K}$. Dans la suite on considérera uniquement un corps $\mathbb{Q} \subset \mathcal{K}$, donc de caractéristique 0.

Ces coefficients sont étroitement liés aux polynômes de Newton (d'où leurs noms) [5] [6].

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_n = x(x-1) \dots (x-n+1) \quad (3)$$

et aux polynômes d'interpolation de Newton [7] [8] [9] [10].

$$\binom{x}{0} = 1, \quad \binom{x}{n} = \frac{(x)_n}{n!} \quad (4)$$

Notons les relations d'orthogonalité suivantes [1] [11] :

$$\begin{cases} (x)_n = \sum_{m=0}^n s_1(n, m) \cdot x^m \\ x^n = \sum_{m=0}^n s_2(n, m) \cdot (x)_m \end{cases} \quad (5)$$

où $s_1(n, m)$ et $s_2(n, m)$ sont respectivement les nombres de Stirling de première et de seconde espèce. [1][2][6][8][12][13].

Lemme I. 1.

Pour tous $0 \leq m \leq n$, on a, $\binom{n}{m} = \binom{X}{m} \Big|_{X=n}$

Preuve :

En effet

$$\begin{aligned} (X)_m &= X(X-1) \dots (X-m+1) = (X-m+m)(X-1) \dots (X-m+1) \\ &= (X-1) \dots (X-m+1)(X-m) + m(X-1) \dots (X-m+1) \\ &= (X-1)_m + m(X-1)_{m-1} \end{aligned}$$

d'où en divisant l'égalité par $m!$, on obtient

$$\binom{x}{m} = \binom{x-1}{m} + \binom{x-1}{m-1}$$

En remplaçant X par n on a (1). ■

Soit maintenant $((x-1)^n)_{n \geq 0}$ une suite des binômes de Newton, on a

$$(xy-1)^k = \sum_{n,m \leq k \leq n+m} \binom{n,m}{k} (x-1)^n (y-1)^m, \quad (6)$$

Où :

$$\binom{n,m}{k} = \binom{k}{n} \binom{n}{k-m} = \frac{k!}{(k-n)! (k-m)! (n+m-k)!}$$

que l'on démontre facilement par récurrence sur k en utilisant (1) [5][6][7].

Le coefficient $\binom{n,m}{k}$ est appelé *coefficient triangulaire de Newton*, coefficient qu'il ne faut pas confondre avec le coefficient trinomial :

$$\binom{k}{n,m,p} = \frac{k!}{n! m! p!}, \text{ où } n+m+p=k.$$

On dit que la suite de binômes de Newton $((X-1)^n)_{n \geq 0}$ est triangulaire multiplicative dissociable par rapport aux coefficients $\binom{n,m}{k}, (n, m \leq k \leq n+m)$.

b. Coefficient binomial de Gauss

D'une manière analogue on appelle coefficient binomial de Gauss de paramètre θ appartenant au groupe multiplicatif $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus \{0\}$, avec θ un élément d'ordre w ($w = 1$, i.e. $\theta = 1$ et $w = \infty$ ne sont pas exclus), les coefficients notés $\binom{n}{m}_\theta$ définis par la relation de récurrence [4][8][14].

$$\binom{n}{0}_\theta = \binom{n}{n}_\theta = 1, \quad \binom{n}{m}_\theta = \theta^m \binom{n-1}{m}_\theta + \binom{n-1}{m-1}_\theta, m \geq 1, \quad (7)$$

Si $n < m$ ou bien au moins un des nombres n ou m plus petit que 0, on pose $\binom{n}{m}_\theta = 0$. Lorsque $\theta = 1$, la relation de récurrence nous ramène au coefficient binomial de Newton.

Ces coefficients sont étroitement liés aux polynômes de Gauss (d'où leur nom) [8].

$$P_n^{(\theta)}(X) = (X-1)(X-\theta)(X-\theta^2) \dots (X-\theta^{n-1}) \quad (8)$$

et aux polynômes d'interpolation de Gauss

$$Q_n^{(\theta)}(X) = \frac{P_n^{(\theta)}(X)}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} \quad (0 \leq n < w) \quad (9)$$

Notons pour la suite que si $\text{ord } \tau = w < \infty$, $P_w^{(\tau)}(X) = (X^w - 1)$ et $P_n^{(\tau)}(X) = (X^w - 1)^{[n/w]} \cdot P_{r_w(n)}^{(\tau)}(X)$, où $n = [n/w]w + r_w(n)$ ($0 \leq r_w(n) < w$). $[r]$ désigne la partie entière d'un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$.

On va donner la forme explicite des coefficients binomiaux de Gauss [4][14].

Proposition I. 1.

Si $m < w$, alors pour tout n :

$$\binom{n}{m}_\theta = Q_m^{(\theta)}(\theta^n) \quad (10)$$

Preuve :

Démontrons d'abord la relation de récurrence

$$Q_m^{(\theta)}(\theta X) = \theta^m Q_m^{(\theta)}(X) + Q_{m-1}^{(\theta)}(X). \quad (11)$$

En effet par définition

$$\begin{aligned} Q_m^{(\theta)}(\theta X) &= \frac{P_m^{(\theta)}(\theta X)}{P_m^{(\theta)}(\theta^m)} = \frac{(\theta X - 1)(\theta X - \theta) \dots (\theta X - \theta^{m-1})}{P_m^{(\theta)}(\theta^m)} = \frac{[(\theta X - \theta^m) + (\theta^m - 1)](\theta X - \theta) \dots (\theta X - \theta^{m-1})}{P_m^{(\theta)}(\theta^m)} \\ &= \frac{(\theta X - \theta) \dots (\theta X - \theta^{m-1})(\theta X - \theta^m)}{P_m^{(\theta)}(\theta^m)} + \frac{(\theta^m - 1)\theta^{m-1}(X - 1)(X - \theta) \dots (X - \theta^{m-2})}{P_m^{(\theta)}(\theta^m)} \\ &= \theta^m \frac{(X - 1) \dots (X - \theta^{n-1})}{P_m^{(\theta)}(\theta^m)} + \frac{(X - 1) \dots (X - \theta^{n-2})}{P_{m-1}^{(\theta)}(\theta^{m-1})} \end{aligned}$$

d'où (11).

Ensuite par récurrence sur $m \geq 0$, on démontre la relation (7), d'où le résultat. ■

Supposons maintenant que θ est d'ordre ∞ , alors selon (10) [4] [12] [14]

$$\binom{n}{m}_\theta = \begin{cases} \frac{(\theta^n - 1)(\theta^n - \theta)(\theta^n - \theta^2) \dots (\theta^n - \theta^{m-1})}{(\theta^m - 1)(\theta^m - \theta)(\theta^m - \theta^2) \dots (\theta^m - \theta^{m-1})} & \text{si } 0 < m \leq n \\ 0 & \text{si } m > n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{(1-\theta^n)(1-\theta^{n-1})(1-\theta^{n-2}) \dots (1-\theta^{n-m+1})}{(1-\theta)(1-\theta^2)(1-\theta^3) \dots (1-\theta^m)} & \text{si } 0 < m \leq n \\ 0 & \text{si } m > n \end{cases} \quad (12)$$

$$\binom{n}{0}_\theta = 1$$

On pose alors [4] [14] :

$$[m]_\theta = \sum_{0 \leq i < m} \theta^i = 1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{m-1} = \begin{cases} \frac{1-\theta^m}{1-\theta} & \text{pour } \theta \neq 1 \\ m & \text{pour } \theta = 1 \end{cases} \quad (13)$$

d'où

$$\binom{n}{m}_\theta = \frac{[n]_\theta [n-1]_\theta \dots [n-m+1]_\theta}{[1]_\theta [2]_\theta \dots [m]_\theta} \quad (14)$$

En termes de θ -factorielles $n!_\theta = [1]_\theta [2]_\theta \dots [n]_\theta$ la formule (14) peut être écrite sous la forme

$$\binom{n}{m}_\theta = \frac{n!_\theta}{m!_\theta \cdot (n-m)!_\theta} \quad (m \leq n) \quad (15)$$

formule analogue à (2), d'où la symétrie $\binom{n}{m}_\theta = \binom{n}{n-m}_\theta$ pour $m \leq n$.

Notons aussi que contrairement au coefficient binomial de Newton, le coefficient binomial de Gauss a une limite lorsque n tend vers ∞ pour $|\theta| < 1$.

$$\binom{\infty}{m}_\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{m}_\theta = \frac{1}{m!_\theta (1-\theta)^m} = \frac{1}{(1-\theta)(1-\theta^2)(1-\theta^3) \dots (1-\theta^m)}.$$

Avec les résultats ci-dessus on montre

$$\binom{n}{m}_\theta = \frac{1-\theta^n}{1-\theta^m} \binom{n-1}{m-1}_\theta = \frac{[n]_\theta}{[m]_\theta} \binom{n-1}{m-1}_\theta.$$

Avec la formule $\binom{n}{m}_\theta = ((1-\theta^n)/(1-\theta^{n-m})) \binom{n-1}{m}_\theta$ on obtient de nouveau les relations de récurrence [4][14] :

$$\binom{n}{m}_\theta = \theta^m \binom{n-1}{m}_\theta + \binom{n-1}{m-1}_\theta \quad \text{et} \quad \binom{n}{m}_\theta = \binom{n-1}{m}_\theta + \theta^{n-m} \binom{n-1}{m-1}_\theta.$$

Ce sont les θ -analogues de la relation de Pascal [14].

La proposition suivante et ses conséquences sont des propriétés spécifiques dans le cas, où $1 < w < \infty$

Proposition 1.2.

Si $m+n \leq w$ et $0 < n < w$, alors

$$\binom{w-n}{m}_\theta = (-1)^m \theta^{-mn - \binom{m}{2}} \binom{m+n-1}{m}_\theta. \quad (16)$$

Preuve :

On transforme l'expression

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=w-n-m+1}^{w-n} (\theta^k - 1) &= (-1)^m \prod_{k=w-n-m+1}^{w-n} (\theta^w - \theta^k) = (-1)^m \theta^{\frac{2w-2n-m+1}{2}m} \prod_{i=w-n-m+1}^{w-n} (\theta^{w-i} - 1) \\
 &= (-1)^m \theta^{-mn - \binom{m}{2}} \prod_{j=n}^{m+n-1} (\theta^j - 1).
 \end{aligned}$$

On divise ensuite l'égalité par $\prod_{j=1}^m (\theta^j - 1)$ et on obtient le résultat. ■

Corollaire I.1.

Pour $0 \leq m < w$, on a : $\binom{w-1}{m}_{\theta} = (-1)^m \theta^{-\binom{m+1}{2}}$.

Corollaire I.2.

Si $1 \leq m \leq w-1$, alors $\binom{w}{m}_{\theta} = 0$.

Preuve :

En effet :

$$\binom{w}{m}_{\theta} = \theta^m \binom{w-1}{m}_{\theta} + \binom{w-1}{m-1}_{\theta} = (-1)^m \theta^{m - \binom{m+1}{2}} + (-1)^{m-1} \theta^{-\binom{m}{2}} = 0 \quad \blacksquare$$

Dans la suite on va énumérer quelques propriétés des coefficients de Gauss qu'on aura besoin :

Théorème I.1.

Si $n = aw + r, m = bw + s$ ($0 \leq r, s < w$), alors

$$\binom{n}{m}_{\theta} = \binom{a}{b} \binom{r}{s}_{\theta} = \binom{a}{b} Q_s^{(\theta)}(\theta^r) \quad (17)$$

Preuve :

La démonstration se fait par récurrence sur n . Pour cela on va considérer quatre cas possibles :

a) $0 \leq r < w-1, 0 < s \leq w-1$. On a

$$\begin{aligned}
 \binom{n+1}{m}_{\theta} &= \theta^m \binom{n}{m}_{\theta} + \binom{n}{m-1}_{\theta} = \theta^s \binom{a}{b} \binom{r}{s}_{\theta} + \binom{a}{b} \binom{r}{s-1}_{\theta} \\
 &= \binom{a}{b} \left[\theta^s \binom{r}{s}_{\theta} + \binom{r}{s-1}_{\theta} \right] = \binom{a}{b} \binom{r+1}{s}_{\theta}
 \end{aligned}$$

b) $r = w-1, 0 < s \leq w-1$. On a en utilisant la démonstration précédente et le corollaire 2 de la proposition 2 ci-dessus :

$$\binom{n+1}{m}_{\theta} = \binom{a}{b} \binom{w}{s}_{\theta} = 0 = \binom{a+1}{b} \binom{0}{s}_{\theta}.$$

c) $0 \leq r < w-1, s = 0$. On a

$$\begin{aligned}
 \binom{n+1}{m}_{\theta} &= \theta^m \binom{n}{m}_{\theta} + \binom{n}{m-1}_{\theta} = \binom{a}{b} \binom{r}{0}_{\theta} + \binom{a}{b-1} \binom{r}{w-1}_{\theta} \\
 &= \binom{a}{b} + 0 = \binom{a}{b} \binom{r+1}{0}_{\theta}
 \end{aligned}$$

d) $r = w-1, s = 0$. Comme ci-dessus on a

$$\binom{n+1}{m}_{\theta} = \binom{a}{b} \binom{w}{0}_{\theta} + \binom{a}{b-1} \binom{w-1}{w-1}_{\theta}$$

$$= \binom{a}{b} + \binom{a}{b-1} = \binom{a+1}{b} = \binom{a+1}{b} \binom{0}{0}_\theta. \quad \blacksquare$$

Corollaire I.3.

On a les relations symétriques

$$\binom{n}{m}_\theta = \binom{n}{n-m}_\theta \quad (18)$$

Preuve :

En effet si $n < m$ les deux expressions sont nulles. Soit alors $n \geq m$, donc $a \geq b$. Supposons d'abord $r \geq s$, alors $n - m = (a - b)w + (r - s)$, avec $0 \leq r - s < w$. D'où

$$\binom{n}{m}_\theta = \binom{a}{b} \binom{r}{s}_\theta = \binom{a}{a-b} \binom{r}{r-s}_\theta = \binom{n}{n-m}_\theta.$$

Soit maintenant $r < s$, alors $0 \leq r < r + w - s < w$ et $n - m = (a + b - 1)w + (w + r - s)$, par suite

$$\binom{n}{m}_\theta = \binom{a}{b} \binom{r}{s}_\theta = 0 = \binom{a}{a-b-1} \binom{r}{r+w-s}_\theta = \binom{n}{n-m}_\theta. \quad \blacksquare$$

Proposition I.3.

Pour tous $m \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k}_\theta \binom{k}{m}_\theta = \binom{n}{m}_\theta \binom{n-m}{n-k}_\theta \quad (19)$$

Preuve :

Soit $n = aw + r$, $m = bw + s$, $k = cw + t$ ($0 \leq r, s, t < w$).

Supposons d'abord, $r < t$, alors $\binom{n}{k}_\theta = 0$ et si de plus $r < s$, alors $\binom{n}{m}_\theta = 0$. Si au contraire $r \geq s$, alors $\binom{n-m}{n-k}_\theta = \binom{a-b}{a-c-1} \binom{r-s}{w+r-t}_\theta = 0$, car $0 \leq r-s < w+r-t$. On peut donc supposer, que $t \leq r$, et si de plus $r < s$, alors $\binom{k}{m}_\theta = \binom{n}{m}_\theta = 0$, si au contraire $t < s < r$, alors $\binom{k}{m}_\theta = 0$, $\binom{n-m}{n-k}_\theta = \binom{a-b}{a-c} \binom{r-s}{r-t}_\theta = 0$, car $0 \leq r-s < r-t$. Ainsi dans tous les cas considérés ci-dessus les deux parties de l'égalité sont nulles. Enfin on peut supposer que $s \leq t \leq r$. L'égalité (19) s'obtient en faisant le produit des relations $\binom{a}{c} \binom{c}{b} = \binom{a}{b} \binom{a-b}{a-c}$ et $\binom{r}{t}_\theta \binom{t}{s}_\theta = \binom{r}{s}_\theta \binom{r-s}{r-t}_\theta$, ce qu'il fallait démontrer. $\blacksquare$

Dans la suite on a besoin des relations d'orthogonalité [16] suivante valable pour tout w :

$$P_n^{(\theta)}(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\theta X^k \quad (20)$$

et l'inverse :

$$X^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_\theta P_n^{(\theta)}(X) \quad (21)$$

que l'on démontre par récurrence en utilisant la formule de récurrence (7), voir aussi [14]. En posant $X = 1$ dans (20) on obtient l'égalité :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_\theta = \delta_{n,0}$$

où δ_{kn} désigne le symbole de Kronecker.

En utilisant la formule (19) on obtient la relation d'orthogonalité :

$$\sum_{m=k}^n (-1)^{m-k} \theta^{\binom{m-k}{2}} \binom{n}{m}_{\theta} \binom{m}{k}_{\theta} = \delta_{n,k}.$$

Dans l'espace vectoriel des polynômes $\mathcal{K}[X]$ considérons l'opérateur [10] [11] :

$$(\Delta_{\theta} P)(X) = \frac{P(\theta X) - P(X)}{X}$$

A coefficient près il a été introduit dans les travaux de Jackson F.H. Il est appelé la dérivée Eulerienne et joue un rôle très important en q -combinatoire [14]. Son utilisation est exclusivement dans le cas $w < \infty$. On a aussi besoin de l'opérateur $(T_{\alpha} P)(X) = P(\alpha X)$. On peut montrer par récurrence sur n , que pour tout w

$$(\Delta_{\theta}^n P)(X) = \theta^{-\binom{n}{2}} X^{-n} (P_n^{(\theta)}(T_{\theta}) P)(X) \quad (22)$$

$$(T_{\theta}^n P)(X) = \sum_{k=0}^n \theta^{\binom{n}{2}} \binom{n}{k}_{\theta} X^k (\Delta_{\theta}^k P)(X);$$

$$\theta^{\binom{k}{2}} \Delta_{\theta}^k P_n^{(\theta)} = P_n^{(\theta)}(\theta^k) \binom{n}{k}_{\theta} P_{n-k}^{(\theta)}. \quad (23)$$

Supposons que $w < \infty$, alors l'opérateur Δ_{θ} est nilpotent. En effet $P_w^{(\theta)}(T_{\theta}) = T_{\theta}^w - 1 = 0$. Il en résulte de (22) que $\Delta_{\theta}^w = 0$. D'où la formule de Jackson [15] [16] (écrite dans une autre notation). Pour tout polynôme P de degré inférieur à $w = \text{ord}(\theta)$

$$P(X) = \sum_{k=0}^{w-1} \theta^{\binom{k}{2}} \Delta_{\theta}^k P(1) Q_k^{(\theta)}(X) \quad (24)$$

valable uniquement pour les polynômes de degré inférieur à w .

Théorème 1.2.

Si $\deg P < w$, alors pour $\alpha \in \mathcal{K}$

$$P(\alpha X) = \sum_{k=0}^{w-1} \theta^{\binom{k}{2}} \alpha^k \Delta_{\theta}^k P(\alpha) Q_k^{(\theta)}(X) \quad (25)$$

Preuve :

On peut vérifier que $\Delta_{\theta}^k T_{\alpha} = \alpha^k T_{\alpha} \Delta_{\theta}^k$, d'où $(\Delta_{\theta}^k T_{\alpha} P)(1) = \alpha^k (\Delta_{\theta}^k P)(1)$. En appliquant la formule (24) au polynôme $T_{\alpha} P$ on obtient le résultat. ■

Corollaire 1.4.

Pour tout $n < w$ et pour $\alpha \in \mathcal{K}$

$$P_n^{(\theta)}(\alpha X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_{\theta} \alpha^k P_{n-k}^{(\theta)}(\alpha) P_k^{(\theta)}(X) \quad (26)$$

Il en résulte :

Proposition 1.5.

Pour $n < w$

$$P_n^{(\theta)}(XY) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_{\theta} X^k P_{n-k}^{(\theta)}(X) P_k^{(\theta)}(Y). \Leftrightarrow Q_n^{(\theta)}(XY) = \sum_{k=0}^n \theta^{-(n-k)k} X^k Q_{n-k}^{(\theta)}(X) Q_k^{(\theta)}(Y). \quad (27)$$

En posant ici $X = \theta^u$ et $Y = \theta^v$ on obtient une généralisation θ –analogue du théorème d'addition de Vandermonde [1] [2] :

$$\binom{u+v}{n}_{\theta} = \sum_{k=0}^n \theta^{k(u-n+k)} \binom{u}{n-k}_{\theta} \binom{v}{k}_{\theta} = \sum_{m=0}^n \theta^{(n-m)(u-m)} \binom{u}{m}_{\theta} \binom{v}{n-m}_{\theta} \quad (28)$$

II. LES COEFFICIENTS TRIANGULAIRES DE GAUSS

On introduit les coefficients.

$$\binom{n, m}{k}_{\theta} = \binom{m}{k-n}_{\theta} P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^n) = \binom{m}{n+m-k}_{\theta} P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^n),$$

appelés les coefficients triangulaires de Gauss de première espèce. Il est évident que $\binom{n, m}{k}_{\theta} = 0$ si une des conditions suivantes est réalisée $n > k$, $m > k$, $n + m - k < 0$, $n + m - k \geq w$. Si au contraire $0 \leq n + m - k < w$, alors

$$\binom{n, m}{k}_{\theta} = \frac{P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^n) \cdot P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^m)}{P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^{n+m-k})},$$

d'où la symétrie

$$\binom{n, m}{k}_{\theta} = \binom{m, n}{k}_{\theta}.$$

Proposition II. 1.

La relation de récurrence suivante est réalisée

$$\binom{n, m}{k-1}_{\theta} + (\theta^k - \theta^m) \binom{n, m}{k}_{\theta} = \binom{n, m+1}{k}_{\theta}.$$

Preuve :

En effet on a par définition :

$$\begin{aligned} \binom{n, m}{k-1}_{\theta} + (\theta^k - \theta^m) \binom{n, m}{k}_{\theta} &= \binom{m}{k-1-n}_{\theta} P_{n+m-k+1}^{(\theta)}(\theta^n) + \\ &\quad + (\theta^n - \theta^{n+m-k}) P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^n) \theta^{k-n} \binom{m}{k-n}_{\theta} \\ &= \left[\binom{m}{k-n-1}_{\theta} + \theta^{k-n} \binom{m}{k-n}_{\theta} \right] P_{n+m-k+1}^{(\theta)}(\theta^n) \\ &= \binom{m+1}{k-n}_{\theta} P_{n+m+1-k}^{(\theta)}(\theta^n) = \binom{n, m+1}{k}_{\theta}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Notons qu'en prenant cette relation de récurrence, avec la condition initiale $\binom{n, 0}{n}_{\theta} = 1$ comme définition le coefficient triangulaire de Gauss est bien défini pour tout θ d'ordre arbitraire.

Théorème II. 1.

On a l'égalité :

$$P_n^{(\theta)} \cdot P_m^{(\theta)} = \sum_{n, m \leq k \leq n+m} \binom{n, m}{k}_{\theta} P_k^{(\theta)} \quad (29)$$

Preuve :

On démontre par récurrence sur m :

$$\begin{aligned}
 P_n^{(\theta)}(X).P_{m+1}^{(\theta)}(X) &= P_n^{(\theta)}(X).P_m^{(\theta)}(X)(X - \theta^m) = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n, m}{k}_\theta P_k^{(\theta)}(X)[(X - \theta^k) + (\theta^k - \theta^m)] \\
 &= \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n, m}{k}_\theta P_k^{(\theta)}(X)(X - \theta^k) + \sum_{k=0}^{n+m} (\theta^k - \theta^m) \binom{n, m}{k}_\theta P_k^{(\theta)}(X) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n, m}{k}_\theta P_{k+1}^{(\theta)}(X) + \sum_{k=0}^{n+m} (\theta^k - \theta^m) \binom{n, m}{k}_\theta P_k^{(\theta)}(X) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+m+1} \left[\binom{n, m}{k-1}_\theta + (\theta^k - \theta^m) \binom{n, m}{k}_\theta \right] P_k^{(\theta)}(X) = \sum_{k=0}^{n+m+1} \binom{n, m+1}{k}_\theta P_k^{(\theta)}(X). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

En posant dans (29) $X = \theta^l$ ($0 \leq l < w$) on obtient une égalité duale de (28) :

$$\binom{l}{n}_\theta \binom{l}{m}_\theta = \sum_{k=0}^l \theta^{(k-n)(k-m)} \binom{k}{n}_\theta \binom{n}{k-m}_\theta \binom{l}{k}_\theta.$$

Ainsi pour $w = \text{ord } \theta = +\infty$ on peut écrire quel que soit $l \geq 0$:

$$Q_n^{(\theta)}(\theta^l).Q_m^{(\theta)}(\theta^l) = \sum_{n, m \leq k \leq n+m} \left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_\theta Q_k^{(\theta)}(\theta^l),$$

Avec :

$$\left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_\theta = \theta^{(k-n)(k-m)} \binom{k}{n}_\theta \binom{n}{k-m}_\theta,$$

d'où l'on obtient si $\text{ord } \theta = +\infty$

$$Q_n^{(\theta)}(X).Q_m^{(\theta)}(X) = \sum_{n, m \leq k \leq n+m} \left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_\theta Q_k^{(\theta)}(X), \quad (30)$$

Il résulte de (29) et de (30) que si $\text{ord } \theta = +\infty$

$$\left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_\theta = \binom{n, m}{k}_\theta \frac{P_n^{(\theta)}(\theta^n).P_m^{(\theta)}(\theta^m)}{P_k^{(\theta)}(\theta^k)}. \quad (31)$$

Les coefficients $\left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_\theta$ sont appelés les *coefficients triangulaires de Gauss de seconde espèce*, nuls si $k < n, k < m, k > n + m$.

Proposition II. 2.

On a l'égalité :

$$X^m P_n^{(\theta)}(X) = \sum_{k=n}^{n+m} \theta^{n(n+m-k)} \binom{m}{k-n}_\theta P_k^{(\theta)}(X)$$

que l'on démontre par récurrence sur n .

En passant dans cette dernière égalité aux polynômes $Q_n^{(\theta)}(X)$ on obtient

$$X^m Q_n^{(\theta)}(X) = \theta^{nm} \sum_{k=n}^{n+m} \binom{m}{k-n}_\theta P_{k-n}^{(\theta)}(\theta^k) Q_k^{(\theta)}(X) = \theta^{nm} \sum_{k=n}^{n+m} \binom{k, n}{n+m}_\theta Q_k^{(\theta)}(X)$$

d'où :

$$X^m Q_{n-m}^{(\theta)}(X) = \theta^{(n-m)m} \sum_{k=n}^{n+m} \binom{k, m}{n}_{\theta} Q_k^{(\theta)}(X). \quad (32)$$

Il résulte de (27) et de (32) la formule :

$$Q_k^{(\theta)}(XY) = \sum_{n, m \leq k \leq n+m} \binom{n, m}{k}_{\theta} Q_n^{(\theta)}(X) Q_m^{(\theta)}(X)$$

par suite si $\text{ord } \theta = \infty$:

$$P_k^{(\theta)}(XY) = \sum_{n, m \leq k \leq n+m} \left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_{\theta} P_n^{(\theta)}(X) P_m^{(\theta)}(X). \quad (33)$$

On dit que la suite des polynômes $P_n^{(\theta)}(X)$ est multiplicative triangulaire dissociable par rapport aux coefficients $\left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_{\theta}$. Il faut noter que si $w < \infty$, (33) est valable pour tout $n, m < w$ et $n + m < w$.

Proposition II.3.

Si $n = i.w + s, m = j.w + t, l = l.w + r, 0 \leq r, s, t < w$, on a pour tous $n, m \leq k \leq n + m$:

$$\left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_{\tau} = \binom{i, j}{l}_{\tau} \left[\begin{matrix} s, t \\ r \end{matrix} \right]_{\tau}$$

Preuve :

En effet par définition :

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_{\tau} &= \tau^{(k-n)(k-m)} \binom{k}{n}_{\tau} \binom{n}{k-m}_{\tau} = \tau^{[(l-i)w+r-s][(l-j)w+r-t]} \binom{lw+r}{iw+s}_{\tau} \binom{(l-j)w+r-t}{(l-j)w+r-t}_{\tau} \\ &= \tau^{(r-s)(r-t)} \binom{l}{i}_{\tau} \binom{r}{s}_{\tau} \binom{i}{l-j}_{\tau} \binom{s}{r-t}_{\tau} = \binom{i, j}{l}_{\tau} \left[\begin{matrix} s, t \\ r \end{matrix} \right]_{\tau}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corollaire II.1.

Dans le cas, où $\text{ord } \tau = w < \infty$ pour tous $n, m \leq k \leq n + m$

$$P_k^{(\tau)}(XY) = \sum_{\substack{n, m \leq k \\ n+m \geq k}} \left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_{\tau} P_n^{(\tau)}(X) P_m^{(\tau)}(X).$$

c'est-à-dire la formule (33) est valable quel que soit $\text{ord } \tau$.

Preuve :

Soit $k = lw + r$, alors

$$\begin{aligned} P_k^{(\tau)}(XY) &= (X^w Y^w - 1)^l P_r^{(\tau)}(XY) = \sum_{i+j \leq l} \binom{i, j}{l}_{\tau} (X^w - 1)^i (Y^w - 1)^j \cdot \sum_{s+t \geq r} \left[\begin{matrix} s, t \\ r \end{matrix} \right]_{\tau} P_s^{(\tau)}(X) P_t^{(\tau)}(X) \\ &= \sum_{\substack{iw+s, jw+t \leq lw+r \\ iw+s+jw+t \geq lw+r}} \binom{i, j}{l}_{\tau} \left[\begin{matrix} s, t \\ r \end{matrix} \right]_{\tau} (X^w - 1)^i P_s^{(\tau)}(X) (Y^w - 1)^j P_t^{(\tau)}(X) = \sum_{\substack{n, m \leq k \\ n+m \geq k}} \left[\begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right]_{\tau} P_n^{(\tau)}(X) P_m^{(\tau)}(X). \end{aligned}$$

L'avant dernière égalité s'explique comme suit : Tout facteur additif de la partie à gauche se trouve dans la partie à droite. En même temps de l'inégalité $iw + s \leq lw + r$, il découle $i \leq l$ mais pas obligatoirement $s \leq r$. Cependant en vertu de la présence de $\left[\begin{matrix} s, t \\ r \end{matrix} \right]_{\tau}$ il reste uniquement les facteurs additifs avec $s \leq r$. Ainsi la partie à droite ne contient pas de facteurs en plus. ■

III. RELATION D'ORTHOGONALITE

A. Construction de l'orthogonalité

La construction se base sur les matrices triangulaires supérieures $S = (s_{mn})$ ($m > n \Rightarrow s_{mn} = 0$) à éléments dans le corps commutatif $\mathcal{K}$. Pour toute suite (ou pour tout vecteur ligne) $x = (x_m)_{m \geq 0}$ d'éléments d'un certain espace vectoriel sur $\mathcal{K}$ est défini le produit $x \times S = (\sum_{m=0}^n x_m \cdot s_{mn})_{n \geq 0}$. La suite $y = x \times S$ des éléments $y_n = \sum_{m=0}^n x_m \cdot s_{mn}$ est appelée la transformée triangulaire supérieure de la suite $x = (x_m)_{m \geq 0}$. Notons que dans le cas où la matrice S est inversible la matrice inverse notée $T = S^{-1} = (t_{mn})$ est aussi une matrice triangulaire supérieure. Les conditions d'inversibilité $S \times T = T \times S = I$ (I est la matrice unité) de la matrice triangulaire supérieure s'écrivent sous la forme :

$$\sum_{n=m}^k s_{mn} \cdot t_{nk} = \delta_{m,k} ; \sum_{n=m}^k t_{mn} \cdot s_{nk} = \delta_{m,k} \quad (34)$$

où $\delta_{m,k}$ est le symbole de Kronecker et elles sont appelées *les relations d'orthogonalité* [1][2]. Les matrices S et T sont l'inverse l'une de l'autre, si et seulement si $x \times S = y \Leftrightarrow y \times T = x$. Autrement dit

$$y_n = \sum_{m=0}^n x_m \cdot s_{mn} \Leftrightarrow x_n = \sum_{m=0}^n y_m \cdot t_{mn}. \quad (35)$$

On va aussi appeler les relations (35) « *relations d'orthogonalité* » entre les suites $x = (x_m)_{m \geq 0}$ et $y = (y_m)_{m \geq 0}$. On dit aussi que ces formules sont les *formules de réciprocity* (pour les coefficients s_{mn} et t_{mn} [5]. Dans le cas, où $x = (x_m)_{m \geq 0}$ et $y = (y_m)_{m \geq 0}$ sont des bases d'un même espace vectoriel, les matrices S et T sont les matrices de passage entre ces deux bases. Notons enfin que si x, y, z sont des bases d'un même espace vectoriel, tels que $y = x \times S_1$, $z = y \times S_2$ et $z = x \times S_3$, alors $S_3 = S_1 \times S_2$.

Comme exemple typique de la construction décrite ci-dessus on considère les relations d'orthogonalité entre les suites de polynômes standards dans le sens $\deg P_n(X) = \deg Q_n(X) = n$ ($n \geq 0$), qui forment des bases de l'espace vectoriel des polynômes $\mathcal{K}[X]$,

$$P_n(X) = \sum_{m=0}^n s_{mn} \cdot Q_m(X) \Leftrightarrow Q_n(X) = \sum_{m=0}^n t_{mn} \cdot P_m(X) \quad (36)$$

relations d'orthogonalité qui définissent des matrices triangulaires supérieures réciproques $S = (s_{mn})$ et $S^{-1} = T = (t_{mn})$.

a. Relations d'orthogonalité utilisant les coefficients binomiaux

Dans la suite, on considère quelques relations d'orthogonalité utilisant les coefficients binomiaux entre des polynômes standards spéciaux et les coefficients qui leurs sont affectés.

Les relations d'orthogonalité entre les deux bases canoniques $((X-1)^n)_{n \geq 0}$ et $(X^n)_{n \geq 0}$

$$(X-1)^n = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \binom{n}{m} X^m \Leftrightarrow X^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (X-1)^m$$

définissent les matrices supérieures triangulaires réciproques :

$$C_0 = \left((-1)^{n-m} \binom{n}{m} \right)_{m,n \geq 0} \text{ et } (C_0)^{-1} = D_0 = \left(\binom{n}{m} \right)_{m,n \geq 0} \quad (37)$$

Les relations d'orthogonalité entre la suite des polynômes d'interpolation de Newton $\left(\binom{X}{n} \right)_{n \geq 0}$ et la base canonique $(X^n)_{n \geq 0}$

$$\binom{X}{n} = \sum_{m=0}^n \frac{s_1(n,m)}{n!} X^m \Leftrightarrow X^n = \sum_{m=0}^n s_2(n,m) \cdot m! \binom{X}{m}$$

définissent les matrices supérieures triangulaires réciproques :

$$S_0 = \left(\frac{s_1(n,m)}{n!} \right)_{m,n \geq 0} \text{ et } (S_0)^{-1} = T_0 = (s_2(n,m) \cdot m!)_{m,n \geq 0} \quad (38)$$

Où $s_1(n,m)$ et $s_2(n,m)$ sont respectivement les nombres de Stirling de première et de seconde espèce [1] [2] [10] [17].

Les relations d'orthogonalité (20) et (21) entre la suite des polynômes de Gauss $(P_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ et de la base canonique $(X^n)_{n \geq 0}$

$$P_n^{(\theta)}(X) = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \theta^{\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_{\theta} X^m \Leftrightarrow X^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m}_{\theta} P_m^{(\theta)}(X)$$

définissent les matrices supérieures triangulaires réciproques :

$$C_1^{(\theta)} = \left((-1)^{n-m} \theta^{\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_{\theta} \right)_{m,n \geq 0} \text{ et } (C_1^{(\theta)})^{-1} = D_1^{(\theta)} = \left(\binom{n}{m}_{\theta} \right)_{m,n \geq 0} \quad (39)$$

Les relations d'orthogonalité entre la suite des polynômes d'interpolation de Gauss $(Q_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ et de la base canonique $(X^n)_{n \geq 0}$, obtenues à partir des formules (20) et (21)

$$Q_n^{(\theta)}(X) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m} \theta^{\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_{\theta}}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} X^m \Leftrightarrow X^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m}_{\theta} P_m^{(\theta)}(\theta^m) Q_m^{(\theta)}(X)$$

définissent les matrices triangulaires supérieures réciproques :

$$S_1^{(\theta)} = \left(\frac{(-1)^{n-m} \theta^{\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_{\theta}}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} \right)_{m,n \geq 0} \text{ et } (S_1^{(\theta)})^{-1} = T_1^{(\theta)} = \left(\binom{n}{m}_{\theta} P_m^{(\theta)}(\theta^m) \right)_{m,n \geq 0} \quad (40)$$

Les relations d'orthogonalité entre la suite des polynômes de Gauss $(P_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ et de la base canonique $((X-1)^n)_{n \geq 0}$ sont

$$(X-1)^n = \sum_{m=0}^n c^{(\theta)}(m, n) P_m^{(\theta)}(X) \Leftrightarrow P_n^{(\theta)}(X) = \sum_{m=0}^n d^{(\theta)}(m, n) (X-1)^m.$$

Donnons les formes explicites des coefficients $d^{(\theta)}(m, n)$ et $c^{(\theta)}(m, n)$. Notons d'abord que $c^{(\theta)}(n, n) = d^{(\theta)}(n, n) = 1$. D'après la formule de Taylor :

$$d^{(\theta)}(m, n) = \left(\frac{D^m P_n^{(\theta)}}{m!} \right) (1) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_{\theta} \binom{k}{m} \quad (41)$$

que l'on peut écrire sous la forme matricielle $D_2^{(\theta)} = D_0 \times C_1^{(\theta)}$, par suite, en passant à la matrice inverse on obtient $C_2^{(\theta)} = D_1^{(\theta)} \times C_0$, d'où :

$$c^{(\theta)}(m, n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m}_{\theta}. \quad (42)$$

Ainsi sont définies les matrices triangulaires supérieures réciproques :

$$C_2^{(\theta)} = \left((-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m}_{\theta} \right)_{m,n \geq 0} \text{ et } (C_2^{(\theta)})^{-1} = D_2^{(\theta)} = \left((-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_{\theta} \binom{k}{m} \right)_{m,n \geq 0} \quad (43)$$

Notons que dans le cas, où $\text{ord } \theta = \infty$ on peut encore écrire :

$$c^{(\theta)}(m, n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^{m-i} \theta^{\binom{m-i}{2}} \binom{m}{i}_{\theta} \theta^{ik}}{P_n^{(\theta)}(\theta^m)} = \frac{\sum_{i=0}^n (-1)^{m-i} \theta^{\binom{m-i}{2}} \binom{m}{i}_{\theta} (\theta^i - 1)^n}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)}$$

Les relations d'orthogonalité entre la suite des polynômes d'interpolation de Gauss $(Q_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ (avec $\text{ord } \theta = \infty$) et de la base canonique $((X-1)^n)_{n \geq 0}$:

$$Q_n^{(\theta)}(X) = \sum_{m=0}^n \frac{d^{(\theta)}(m, n)}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} (X-1)^m \Leftrightarrow (X-1)^n = \sum_{m=0}^n c^{(\theta)}(m, n) P_m^{(\theta)}(\theta^m) Q_m^{(\theta)}(X),$$

où les coefficients $d^{(\theta)}(m, n)$ et $c^{(\theta)}(m, n)$ sont donnés respectivement par les formules (41) et (42) définissent les matrices triangulaires réciproques :

$$S_2^{(\theta)} = \left(\frac{d^{(\theta)}(m, n)}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} \right)_{m, n \geq 0} \quad \text{et} \quad (S_2^{(\theta)})^{-1} = T_2^{(\theta)} = \left(c^{(\theta)}(m, n) P_m^{(\theta)}(\theta^m) \right)_{m, n \geq 0} \quad (44)$$

Remarquons que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{d^{(\theta)}(1, n)}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (1 - \theta^i)}{\prod_{i=0}^{n-1} (\theta^n - \theta^i)} = \frac{(-1)^n \theta^{-\binom{n}{2}}}{1 - \theta^n}.$$

les relations d'orthogonalité entre les suites des polynômes de Gauss $(P_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ et $(P_n^{(\tau)}(X))_{n \geq 0}$ de paramètres différents θ et τ

$$P_n^{(\theta)}(X) = \sum_{m=0}^n c^{(\tau, \theta)}(m, n) P_m^{(\tau)}(X) \Leftrightarrow P_n^{(\tau)}(X) = \sum_{m=0}^n c^{(\theta, \tau)}(m, n) P_m^{(\theta)}(X)$$

définissent les matrices triangulaires réciproques

$$C^{(\tau, \theta)} = \left(c^{(\tau, \theta)}(m, n) \right)_{m, n \geq 0} \quad \text{et} \quad (C^{(\tau, \theta)})^{-1} = C^{(\theta, \tau)} = \left(c^{(\theta, \tau)}(m, n) \right)_{m, n \geq 0}, \quad (45)$$

où, d'après la formule (39) on a $D_1^{(\tau)} \times C_1^{(\theta)} = C^{(\tau, \theta)}$, par suite

$$c^{(\tau, \theta)}(m, n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_{\theta} \binom{k}{m}_{\tau} \quad (46)$$

Les relations d'orthogonalité entre la suite des polynômes d'interpolation de Gauss $(Q_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ ($\text{ord } \theta = \infty$) de paramètre θ et la suite des polynômes de Gauss $(P_n^{(\tau)}(X))_{n \geq 0}$ de paramètre τ :

$$Q_n^{(\theta)}(X) = \sum_{m=0}^n \frac{c^{(\tau, \theta)}(m, n)}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} P_m^{(\tau)}(X) \Leftrightarrow P_n^{(\tau)}(X) = \sum_{m=0}^n c^{(\theta, \tau)}(m, n) P_m^{(\theta)}(\theta^m) Q_m^{(\theta)}(X),$$

où les coefficients $c^{(\tau, \theta)}(m, n)$ et $c^{(\theta, \tau)}(m, n)$ sont donnés par la formule (46), définissent les matrices triangulaires réciproques :

$$S^{(\tau, \theta)} = \left(\frac{c^{(\tau, \theta)}(m, n)}{P_n^{(\theta)}(\theta^n)} \right)_{m, n \geq 0} \quad \text{et} \quad (S^{(\tau, \theta)})^{-1} = T^{(\tau, \theta)} = \left(c^{(\theta, \tau)}(m, n) P_m^{(\theta)}(\theta^m) \right)_{m, n \geq 0} \quad (47)$$

IV. SUITE DE POLYNOMES TRIANGULAIRES DISSOCIABLES

Le système d'éléments $(A_k^{n, m})_{k, m, n \geq 0}$ d'un corps commutatif $\mathcal{K}$ est dit triangulaire si $A_k^{n, m} = 0$ pour $k > n + m$ ou $k < \max(n, m)$. Dans ce cas les éléments $A_k^{n, m}$ sont appelés coefficients triangulaires. Tout système de coefficients $(A_k^{n, m})_{k, m, n \geq 0}$, tel que $(n + m \geq k \geq \max(n, m))$, peut être prolongé par des éléments nuls pour obtenir un système triangulaire.

Soit $(P_n(X))_{n \geq 0}$ une suite de polynômes standards (i.e. $\deg P_n = n$), " $*$ " une opération sur les arguments ($X * Y \in \mathcal{K}[X, Y]$). On dit que la suite $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire dissociable par rapport à l'opération " $*$ " et le système de coefficients triangulaires $(A_k^{n, m})_{k, m, n \geq 0}$ si elle vérifie la décomposition suivante :

$$P_k(X * Y) = \sum_{\substack{n, m \leq k \\ n+m \geq k}} A_k^{n, m} P_n(X) P_m(Y) \quad (48)$$

En vertu de l'indépendance linéaire du système $\{P_n(X)P_m(Y)\}_{m,n \geq 0}$, les coefficients $A_k^{n,m}$ sont définis d'une manière uniforme. Lorsque l'opération « * » est l'addition « + » on dit que le système est dissociable additif et lorsque l'opération « * » est la multiplication « × » on dit que le système est dissociable multiplicatif. On dit qu'une suite $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire dissociable si et seulement si, elle est triangulaire dissociable par rapport à un certain système de coefficients triangulaires. Lorsque l'opération * est commutative (resp. associative), on a respectivement

$$A_k^{n,m} = A_k^{m,n} \text{ et } \sum_{i=\max(n,m)}^k A_i^{n,m} A_k^{i,\ell} = \sum_{j=\max(m,\ell)}^k A_k^{n,j} A_j^{m,\ell} \quad (k, \ell, m, n \geq 0) \quad (49)$$

Il résulte de la définition (48) que pour $n = 0$, $P_0(X) = (A_0^{0,0})^{-1}$.

Un élément $\varepsilon \in \mathcal{K}$ est unité par rapport à l'opération « * » si $X * \varepsilon = X$. Il est évident que dans le cas multiplicatif $\varepsilon = 1$ et dans la cas additif $\varepsilon = 0$.

Lemme IV. 1.

Ou bien $A_k^{k,0} = A_0^{0,0}$ ou bien $P_k(\varepsilon) = 0$ ($k \geq 1$).

Preuve :

Il résulte de la définition (48) la relation $\sum_{m=k-n}^k A_k^{n,m} P_n(\varepsilon) P_m(\varepsilon) = P_k(\varepsilon)$ ($n = 0, 1, \dots, k$), d'où $A_k^{k,0} P_0(\varepsilon) P_k(\varepsilon) = P_k(\varepsilon)$ ($k \geq 1$). ■

En théorie combinatoire, la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est dite binomiale, si :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } P_k(X + Y) = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} P_n(X) P_{k-n}(Y) \quad (k \geq 0).$$

Ainsi une suite binomiale est triangulaire additive dissociable par rapport au système des coefficients triangulaires $A_k^{n,m} = \binom{k}{n} \delta_{k,n+m}$ et $P_k(0) = 0$ ($k \geq 1$). Comme exemples de suites binomiales on peut citer $(X^n)_{n \geq 0}$, $((X)_n)_{n \geq 0}$, avec $(X)_n = X(X-1) \dots (X-n+1)$ ($n \geq 0$).

La notion de suite triangulaire dissociable peut être considérée comme la généralisation de la suite binomiale de polynômes dans trois directions : a) extension du domaine de sommation, b) forme arbitraire des coefficients, c) opération arbitraire.

Deux systèmes triangulaires $A = (A_k^{n,m})$ et $B = (B_k^{n,m})$ sont dits associés, s'il existe une suite de scalaires non nuls $(\lambda_n)_{n \geq 0}$, tels que $A_k^{n,m} = \frac{\lambda_n \lambda_m}{\lambda_k} B_k^{n,m}$ ($k, m, n \geq 0$).

Deux suites de polynômes $(P_n(X))_{n \geq 0}$ et $(Q_n(X))_{n \geq 0}$ sont dites associées, s'il existe une suite de scalaires non nuls $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ tels que $Q_n(X) = \lambda_n \cdot P_n(X)$ ($n \geq 0$).

Lemme IV. 2.

Si deux suites triangulaires dissociables $(P_n(X))_{n \geq 0}$ et $(Q_n(X))_{n \geq 0}$ respectivement par rapport aux systèmes triangulaires A et B sont associés, alors les systèmes correspondants A et B sont aussi associés avec la même suite de coefficients $(\lambda_n)_{n \geq 0}$.

Lemme IV. 3.

Si $(Q_n(X))_{n \geq 0}$ est une suite de polynômes associée, avec la suite de coefficients $(\lambda_n)_{n \geq 0}$, à une suite de polynômes $(P_n(X))_{n \geq 0}$, ($P_n(X) = \lambda_n \cdot Q_n(X)$) triangulaire dissociable par rapport au système A , alors $(Q_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire dissociable par rapport à un système B associé à A , avec la suite de coefficients $(\lambda_n^{-1})_{n \geq 0}$.

Donnons quelques exemples de suites triangulaires multiplicatives dissociables.

1) La suite de polynômes $(X^n)_{n \geq 0}$ est triangulaire multiplicative dissociable par rapport au système triangulaire $A_k^{n,m} = \delta_{k,n} \cdot \delta_{k,m}$.

2) La suite de polynômes $((X-1)^n)_{n \geq 0}$ est triangulaire multiplicative dissociable par rapport au système triangulaire $A_k^{n,m} = \binom{n}{k} \binom{m}{k-m}$, d'après la formule (6).

3) La suite de polynômes $(P_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire multiplicative dissociable par rapport au système triangulaire $A_k^{n,m} = \left[\begin{smallmatrix} n, m \\ k \end{smallmatrix} \right]_{\theta} = \theta^{(k-n)(k-m)} \binom{k}{n}_{\theta} \binom{n}{k-m}_{\theta}$, d'après la formule (35) et le corollaire de la proposition 8.

4) La suite de polynômes $(Q_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ ($\text{ord } \theta = \infty$) est triangulaire multiplicative dissociable par rapport au système triangulaire

$$A_k^{n,m} = \binom{n}{k}_{\theta} = \left(P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^n) \cdot P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^m) \right) / \left(P_{n+m-k}^{(\theta)}(\theta^{n+m-k}) \right)$$

Soient maintenant $(P_n(X))_{n \geq 0}$ et $(Q_n(X))_{n \geq 0}$ deux suites standards de polynômes liées par les relations d'orthogonalité (36) qui définissent des matrices triangulaires supérieures réciproques $S = (s_{mn})$ et $S^{-1} = T = (t_{mn})$. Rappelons ces relations d'orthogonalité

$$P_n(X) = \sum_{m=0}^n s_{mn} \cdot Q_m(X) \Leftrightarrow Q_n(X) = \sum_{m=0}^n t_{mn} \cdot P_m(X)$$

Lemme IV. 4.

Si $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est une suite triangulaire dissociable par rapport à l'opération « * » et le système triangulaire $A = (A_k^{n,m})$, alors $(Q_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire dissociable par rapport à l'opération « * » et le système $B = (B_k^{n,m})$ si, et seulement si, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{\substack{u,v \leq k \\ u+v \geq k}} t_{iu} t_{jv} B_k^{u,v} = \sum_{h=\max(i,j)}^{\min(i+j,k)} A_h^{i,j} t_{hk} \quad (i, j, k \geq 0) \quad (50)$$

Preuve :

En effet la suite $(Q_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire dissociable par rapport à « * » et $B = (B_k^{n,m})$ si, et seulement si,

$$\begin{aligned} Q_k(X * Y) &= \sum_{\substack{u,v \leq k \\ u+v \geq k}} B_k^{u,v} Q_u(X) Q_v(Y) \Leftrightarrow \sum_{h=0}^k t_{hk} P_h(X * Y) = \sum_{\substack{u,v \leq k \\ u+v \geq k}} B_k^{u,v} \sum_{i=0}^u t_{iu} P_i(X) \sum_{j=0}^v t_{jv} P_j(Y) \\ &\Leftrightarrow \sum_{h=0}^k t_{hk} \sum_{\substack{i,j \leq h \\ i+j \geq h}} A_h^{i,j} P_i(X) P_j(Y) = \sum_{i,j=0}^k \left(\sum_{\substack{u,v \leq k \\ u+v \geq k}} t_{iu} t_{jv} B_k^{u,v} \right) P_i(X) P_j(Y) \\ &\Leftrightarrow \sum_{i,j=0}^k \left(\sum_{h=\max(i,j)}^{\min(i+j,k)} A_h^{i,j} t_{hk} \right) P_i(X) P_j(Y) = \sum_{i,j=0}^k \left(\sum_{\substack{u,v \leq k \\ u+v \geq k}} t_{iu} t_{jv} B_k^{u,v} \right) P_i(X) P_j(Y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lemme IV. 5.

La relation (50) est équivalente à la relation duale :

$$\sum_{\substack{i,j \leq \ell \\ i+j \geq \ell}} s_{ni} s_{mj} A_{\ell}^{i,j} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m, \ell)} B_k^{n,m} s_{k\ell} \quad (\ell, m, n \geq 0) \quad (51)$$

Notons que la relation (51) est équivalente à :

$$\sum_{k=\max(n,m)}^{\ell} t_{k\ell} \sum_{i+j \geq k}^{i,j \leq k} A_k^{i,j} s_{ni} s_{mj} = \begin{cases} B_{\ell}^{n,m} & \text{si } n+m \geq \ell \geq \max(n,m) \\ 0 & \text{si } \ell \geq n+m \text{ ou } \ell < \max(n,m) \end{cases}$$

Donnons quelques exemples de relations de la forme (51) obtenus en se basant sur les *lemmes* IV.4 et IV.5.

1) Pour les suites triangulaires additives dissociables $\left(\binom{X}{n}\right)_{n \geq 0}$ par rapport à $A = (\delta_{k,n+m})$ et $(X^n)_{n \geq 0}$ par rapport à $B = \left(\binom{k}{n} \delta_{k,n+m}\right)$ on obtient la formule connue des nombres de Stirling [Riordan]

$$\sum_{i+j=\ell} \frac{s_1(i,n)}{i!} \frac{s_1(j,m)}{j!} = \binom{n+m}{n} \frac{s_1(\ell, n+m)}{\ell!}$$

2) Pour les suites triangulaires multiplicatives dissociables $(Q_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ par rapport à $A = \left(\binom{n,m}{k}\right)_{\theta}$ et $(X^n)_{n \geq 0}$ par rapport à $B = (\delta_{kn} \delta_{km})$, d'après les relations d'orthogonalité (40) on obtient

$$\sum_{i+j \leq \ell} \binom{i,j}{\ell}_{\theta} \frac{\left((-1)^{i-n} \theta^{\binom{i-n}{2}} \binom{i}{n}_{\theta}\right) \left((-1)^{j-m} \theta^{\binom{j-m}{2}} \binom{j}{m}_{\theta}\right)}{P_i^{(\theta)}(\theta^i) P_j^{(\theta)}(\theta^j)} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} \delta_{kn} \delta_{km} \frac{(-1)^{\ell-k} \theta^{\binom{\ell-k}{2}} \binom{\ell}{k}_{\theta}}{P_{\ell}^{(\theta)}(\theta^{\ell})}$$

3) Pour les suites triangulaires multiplicatives dissociables $(Q_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ par rapport à $A = \left(\binom{n,m}{k}\right)_{\theta}$ et $((X-1)^n)_{n \geq 0}$ par rapport à $B = \left(\binom{n,m}{k}\right)$, d'après les relations d'orthogonalité (44), on obtient

$$\sum_{i+j \leq \ell} \binom{i,j}{\ell}_{\theta} \frac{d^{(\theta)}(n,i) d^{(\theta)}(m,j)}{P_i^{(\theta)}(\theta^i) P_j^{(\theta)}(\theta^j)} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} \binom{n,m}{k} \frac{d^{(\theta)}(k,\ell)}{P_{\ell}^{(\theta)}(\theta^{\ell})},$$

où $d^{(\theta)}(m,n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_{\theta} \binom{k}{m}$ (formule (41)).

4) Pour les suites triangulaires multiplicatives dissociables $(Q_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ par rapport à $A = \left(\binom{n,m}{k}\right)_{\theta}$ et $(P_n^{(\tau)}(X))_{n \geq 0}$ par rapport à $B = \left[\begin{smallmatrix} n,m \\ k \end{smallmatrix}\right]_{\tau}$, d'après les relations d'orthogonalité (47) on obtient

$$\sum_{i+j \leq \ell} \binom{i,j}{\ell}_{\theta} \frac{c^{(\tau,\theta)}(n,i) c^{(\tau,\theta)}(m,j)}{P_i^{(\theta)}(\theta^i) P_j^{(\theta)}(\theta^j)} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} \left[\begin{smallmatrix} n,m \\ k \end{smallmatrix}\right]_{\tau} \frac{c^{(\tau,\theta)}(k,\ell)}{P_{\ell}^{(\theta)}(\theta^{\ell})},$$

où $c^{(\tau,\theta)}(m,n) = \sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \theta^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_{\theta} \binom{k}{m}_{\tau}$ (formule (46)).

En se référant aux résultats précédents on peut obtenir les critères de la triangularité dissociable de la suite de polynômes standards $(P_n(X))_{n \geq 0}$ vérifiant les relations d'orthogonalité

$$P_n(X) = \sum_{m=0}^n s_{mn} X^m \Leftrightarrow X^n = \sum_{m=0}^n t_{mn} P_m(X)$$

Ici $S = (s_{mn})_{m,n \geq 0}$ et $T = (t_{mn})_{m,n \geq 0}$ sont des matrices triangulaires supérieures inverses l'une de l'autre.

Lemme IV. 6.

La suite $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire multiplicative dissociable par rapport au système des coefficients triangulaires $A = (A_k^{n,m})$ si et seulement si

$$t_{n\ell}t_{m\ell} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} A_k^{n,m} t_{k\ell} \quad (\ell, m, n \geq 0) \quad (52)$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer la formule (50), sachant que la suite de polynômes $(X^n)_{n \geq 0}$ est triangulaire multiplicative dissociable par rapport au système $(\delta_{k,n} \cdot \delta_{k,m})$. ■

Notons que l'égalité (52) est équivalente à :

$$\sum_{k=0}^{\ell} s_{k\ell} t_{nk} t_{mk} = \begin{cases} A_{\ell}^{n,m} & \text{si } n+m \geq \ell \geq \max(n,m) \\ 0 & \text{si } \ell \geq n+m \text{ ou } \ell < \max(n,m) \end{cases} \quad (53)$$

D'où la suite $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire multiplicative dissociable si et seulement si $\sum_{k=\max(n,m)}^{\ell} s_{k\ell} t_{nk} t_{mk} = 0$ lorsque $\ell \geq n+m$ ou $\ell < \max(n,m)$. Dans ce cas :

$$A_{\ell}^{n,m} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\ell} s_{k\ell} t_{nk} t_{mk} \quad (n+m \geq \ell \geq \max(n,m)) \quad (54)$$

Par exemple considérons la suite de polynômes de Gauss $(P_n^{(\theta)}(X))_{n \geq 0}$ pour laquelle $S = ((-1)^{n-m} \theta^{\binom{n-m}{2}} \binom{n}{m}_{\theta})_{m,n \geq 0}$ et $T = (\binom{n}{m}_{\theta})_{m,n \geq 0}$ formule (39). On a, d'après la formule (30), l'identité $\binom{\ell}{n}_{\theta} \binom{\ell}{m}_{\theta} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\ell} \left[\begin{smallmatrix} n, m \\ k \end{smallmatrix} \right]_{\theta} \binom{\ell}{k}_{\theta}$, autrement dit la condition du lemme 4.6 est bien vérifiée. Il résulte alors de la formule (54)

$$A_{\ell}^{n,m} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\ell} (-1)^{\ell-k} \theta^{\binom{\ell-k}{2}} \binom{\ell}{k}_{\theta} \binom{k}{n}_{\theta} \binom{k}{m}_{\theta} = \left[\begin{smallmatrix} n, m \\ \ell \end{smallmatrix} \right]_{\theta}.$$

Les critères de triangularité additive peuvent être aussi obtenus d'une manière analogue.

La suite $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire additive dissociable par rapport à $A = (A_k^{n,m})$ si et seulement si,

$$\sum_{0 \leq i \leq \ell} \binom{\ell}{i} t_{ni} t_{m(\ell-i)} = \sum_{k=\max(n,m)}^{\min(n+m,\ell)} A_k^{n,m} t_{k\ell}. \quad (55)$$

V. SUITE TRIANGULAIRE MULTIPLIABLE

A. Définition

Soit A une algèbre unitaire associative et commutative. Une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A est dite « triangulaire multipliable » par rapport au système triangulaire $A = (A_k^{n,m})$, si elle est linéairement indépendante et vérifie le développement suivant :

$$a_n a_m = \sum_{k=\max(n,m)}^{n+m} A_k^{n,m} a_k \quad (56)$$

Notons que les coefficients $A_k^{n,m}$ sont définis d'une manière uniforme. Pour $m = 1$ on obtient la relation de récurrence $A_{n+1}^{n,1} a_{n+1} = a_n (a_1 - A_n^{n,1})$ ($n \geq 0$). Il résulte de l'associativité, de la commutativité de l'algèbre A et de triangularité des coefficients A .

$$\sum_{j=\max(m,\ell,k-n)}^{\min(k,m+\ell)} A_k^{n,j} A_j^{m,\ell} = \sum_{i=\max(n,m,k-\ell)}^{\min(k,n+m)} A_i^{n,m} A_i^{i,\ell} \quad (57)$$

$$A_k^{n,m} = A_k^{m,n} \quad (58)$$

$$A_k^{n,0} = A_n^{n,0} \delta_{kn} \quad (59)$$

Par suite

$$A_{m+1}^{m,1} A_k^{n,m+1} = A_k^{k-1,1} A_{k-1}^{n,m} + (A_k^{k,1} - A_m^{m,1}) A_k^{n,m} \quad (60)$$

Pour cela il suffit de poser $\ell = 1$ dans (57).

Corollaire V. 1.

Si l'algèbre unitaire A est sans diviseurs de zéros, alors

$$a_0 = A_0^{0,0} = 1 = A_n^{0,n}, \quad A_k^{n,0} = \delta_{kn} \quad (n \geq 0) \quad (61)$$

a. Suites associées

En généralisant les suites de polynômes associées, on dit que deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ d'une algèbre A sont associées s'il existe une suite de scalaires $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ telle que $\lambda_n \neq 0$ ($n \geq 0$) et $a_n = \lambda_n b_n$ ($n \geq 0$). On démontre que si deux suites $a = (a_n)_{n \geq 0}$ et $b = (b_n)_{n \geq 0}$ sont triangulaires multipliables respectivement par rapport à $A = (A_k^{n,m})$ et à $B = (B_k^{n,m})$, alors les systèmes A et B sont aussi associés avec la même suite de scalaires. De même tout système triangulaire $B = (B_k^{n,m})$ associé à un système triangulaire $A = (A_k^{n,m})$, qui satisfait les conditions (57) – (61), vérifie également ces conditions.

Comme exemples de suite triangulaire multipliable on peut citer les suites de polynômes standards par rapport à des coefficients triangulaires connus. Par exemple :

$$\begin{aligned} 1) \quad a_n = X^n, A_k^{n,m} = \delta_{k(n+m)}, \quad 2) \quad a_n = X^n/n!, A_k^{n,m} = \binom{k}{n} \delta_{k(n+m)}, \quad 3) \quad a_n = \binom{X}{n}, A_k^{n,m} = \binom{n}{k}^m, \quad 4) \quad a_n = \\ P_n^{(\theta)}(X), A_k^{n,m} = \binom{n}{k}^m_\theta, a_n = Q_n^{(\theta)}(X), A_k^{n,m} = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_\theta^m \quad (ord \theta = \infty). \end{aligned}$$

b. Suite de polynômes triangulaires multipliables et Orthogonalités

Considérons maintenant deux suites linéairement indépendantes d'éléments de l'algèbre A $a = (a_n)_{n \geq 0}$ et $b = (b_n)_{n \geq 0}$ vérifiant la relation d'orthogonalité $a_n = \sum_{m=0}^n s_{mn} b_m \Leftrightarrow b_n = \sum_{m=0}^n t_{mn} a_m$, où $S = (s_{mn})_{m,n \geq 0}$ et $T = (t_{mn})_{m,n \geq 0}$ sont des matrices triangulaires supérieures inverses l'une de l'autre. Alors si $a = (a_n)_{n \geq 0}$ et $b = (b_n)_{n \geq 0}$ sont respectivement triangulaires multipliables par rapport à $A = (A_k^{n,m})$ et à $B = (B_k^{n,m})$ on a

$$\sum_{i+j \geq \ell} t_{in} t_{jm} A_\ell^{i,j} = \sum_{k=\max(\ell,m,n)}^{n+m} B_k^{n,m} t_{\ell k} \Leftrightarrow \sum_{i+j \geq \ell} s_{in} s_{jm} B_\ell^{i,j} = \sum_{k=\max(\ell,m,n)}^{n+m} A_k^{n,m} s_{\ell k} \quad (62)$$

Ainsi, d'après la relation d'orthogonalité

$$P_n(X) = \sum_{m=0}^n s_{mn} X^m \Leftrightarrow X^n = \sum_{m=0}^n t_{mn} P_m(X)$$

la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire multipliable par rapport $A = (A_k^{n,m})$ si et seulement si,

$$\sum_{0 \leq i \leq \ell} t_{in} t_{(\ell-i)m} = \sum_{k=\max(\ell,m,n)}^{n+m} A_k^{n,m} t_{\ell k} \quad (\ell, m, n \geq 0). \quad (63)$$

c. Méthode générale pour obtenir des systèmes triangulaires

On va donner une méthode générale pour obtenir des systèmes triangulaires. On dit qu'un système triangulaire $A = (A_k^{n,m})$ satisfaisant aux conditions (57) – (61) est unitaire, si $A_{n+1}^{n,1} = 1$ ($n \geq 0$). Ainsi pour un système triangulaire unitaire les formules (60), (61) prennent les formes

$$A_k^{n,m+1} = A_{k-1}^{n,m} + (A_k^{k,1} - A_m^{m,1}) A_k^{n,m}, \quad A_k^{n,0} = \delta_{kn} \quad (k, n \geq 0) \quad (64)$$

. Soit maintenant donnée une suite de scalaires $(\lambda_n)_{n \geq 0}$. En s'inspirant de la formule (63) ci-dessus et des conditions (57) – (61), on définit les coefficients $\omega_k^{n,m}$ ($k, m, n \geq 0$) par les relations de récurrence

$$\omega_k^{n,0} = \omega_k^{0,n} = \delta_{kn}, \quad \omega_k^{n,m+1} = \omega_{k-1}^{n,m} + (\lambda_k - \lambda_m) \omega_k^{n,m} \quad (k, m, n \geq 0) \quad (65)$$

Il en résulte $\omega_{n+1}^{n,1} = 1$, $\omega_n^{n,1} = \lambda_n - \lambda_0$, $\omega_0^{0,0} = 1$.

Lemme V. 1.

Les coefficients $\omega_k^{n,m}$ sont triangulaires, i.e.

$$n + m < k \text{ ou } k < \max(n, m) \Rightarrow \omega_k^{n,m} = 0.$$

Preuve :

On démontre par récurrence sur m pour tous les n, k . Pour $m = 0$ la formule (64) signifie que $n < k$ ou $k < n \Rightarrow \omega_k^{n,0} = 0$. Supposons le lemme vrai jusqu'à un certain m et démontrons le pour $m + 1$. Supposons d'abord que $n + m + 1 < k$. Par hypothèse de récurrence, on a $n + m < k \Rightarrow \omega_{k-1}^{n,m} = 0$ et $n + m < k \Rightarrow \omega_k^{n,m} = 0$, par suite, d'après (64) $\omega_k^{n,m+1} = 0$. Supposons maintenant que $k < \max(n, m + 1)$. Considérons deux cas. Dans le cas, où $m < n$ on a $\max(n, m + 1) = n$, ainsi $k < n$. Par hypothèse de récurrence si $k - 1 < n = \max(n, m)$, $\omega_{k-1}^{n,m} = 0$, si $k < n = \max(n, m)$, $\omega_k^{n,m} = 0$ et, par suite, d'après (64) $\omega_k^{n,m+1} = 0$. Dans le cas où $m \geq n$ on a $\max(n, m + 1) = m + 1$, alors $k < m + 1$. Considérons les deux sous cas possibles : Pour $k = m$, par hypothèse de récurrence $m - 1 < m = \max(n, m) \Rightarrow \omega_{m-1}^{n,m} = 0$, d'où d'après (64) $\omega_m^{n,m+1} = 0 + (\lambda_m - \lambda_m) \omega_m^{n,m} = 0$. Pour $k < m$ par hypothèse de récurrence $k - 1 < m = \max(n, m) \Rightarrow \omega_{k-1}^{n,m} = 0$, de même $k < n = \max(n, m) \Rightarrow \omega_k^{n,m} = 0$. Ainsi d'après (64) $\omega_k^{n,m+1} = 0$. ■

Notons de plus que le système $\omega = (\omega_k^{n,m})$ satisfait les conditions (58) – (60).

On va généraliser la construction précédente. Etant donné deux suites de scalaires $\lambda = (\lambda_n)_{n \geq 0}$ et $\mu = (\mu_n)_{n \geq 0}$, telles que $\mu_n \neq 0$ ($n \geq 0$). On définit les coefficients $\Pi_k^{n,m}$ ($k, m, n \geq 0$) par les relations de récurrence

$$\Pi_k^{0,n} = \Pi_k^{n,0} = \mu_0 \delta_{kn}, \quad \mu_m \Pi_k^{n,m+1} = \mu_k \Pi_{k-1}^{n,m} + (\lambda_k - \lambda_m) \Pi_k^{n,m} \quad (66)$$

Posons

$$\rho_0 = \mu_0, \rho_1 = 1, \dots, \rho_n = \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$\varphi_k^{n,m} = \frac{\rho_k}{\rho_n \rho_m} \Pi_k^{n,m} \Leftrightarrow \Pi_k^{n,m} = \frac{\rho_n \rho_m}{\rho_k} \varphi_k^{n,m} \quad (67)$$

Les coefficients $\varphi_k^{n,m}$ satisfont aux conditions (65), à savoir

$$\varphi_k^{n,0} = \varphi_k^{0,n} = \delta_{kn}, \quad \varphi_k^{n,m+1} = \varphi_{k-1}^{n,m} + (\lambda_k - \lambda_m) \varphi_k^{n,m} \quad (k, m, n \geq 0)$$

et ainsi coïncident avec $\omega_k^{n,m}$, par suite le système $\Pi = (\Pi_k^{n,m})$ est triangulaire associé à $\omega = (\omega_k^{n,m})$.

d. Construction de suite de polynômes triangulaires multipliables

On va construire une suite de polynômes triangulaires multipliables. Une suite de polynômes est dite unitaire, si elle est une suite de polynômes standards et les coefficients dominants de tous les polynômes sont égaux à l'unité 1. IL est facile de voir que si une suite de polynômes unitaires est triangulaire multipliable par rapport à $A = (A_k^{n,m})$, alors le système A est unitaire. Soit

$$\omega_0^{(\lambda)}(X) = 1, \quad \omega_n^{(\lambda)}(X) = (X - \lambda_0)(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_{n-1}) \quad (n \geq 1) \quad (68)$$

une suite unitaire de polynômes. Notons la relation de récurrence

$$\omega_{n+1}^{(\lambda)}(X) = \omega_n^{(\lambda)}(X) (\omega_1^{(\lambda)}(X) + \lambda_0 - \lambda_n). \quad (69)$$

On démontre que la suite $\left(\omega_n^{(\lambda)}(X)\right)_{n \geq 0}$ est triangulaire multipliable par rapport au système unitaire $\omega = (\omega_k^{n,m})$ défini par la formule (64).

On introduit ensuite la suite de polynômes $Q_n^{(\lambda,\mu)}(X) = \rho_n \omega_n^{(\lambda)}(X)$ ($n \geq 0$). La suite $\left(Q_n^{(\lambda,\mu)}(X)\right)_{n \geq 0}$ est triangulaire multipliable par rapport à $\Pi = (\Pi_k^{n,m})$.

Donnons quelques exemples de polynômes $\omega_n^{(\lambda)}(X)$ et $Q_n^{(\lambda,\mu)}(X)$. 1) Pour $\lambda_n = 0, n \geq 0$, on a $\omega_k^{n,m} = \delta_{k(n+m)}$ et $\omega_n^{(\lambda)}(X) = X^n$. 2) Pour $\lambda_n = 0, \mu_n = n + 1, n \geq 0$, on a $\rho_n = 1/n!$, $Q_n^{(\lambda,\mu)}(X) = X^n/n!$. 3) Pour $\lambda_n = \theta^n$ ($\theta \neq 0, 1$) on a $\omega_n^{(\lambda)}(X) = P_n^{(\theta)}(X)$. 4) Pour $\lambda_n = n$ ($n \geq 0$) on a $\omega_n^{(\lambda)}(X) = (X)_n$. 5) Pour $\lambda_n = n, \mu_n = n + 1, n \geq 0$ on a $Q_n^{(\lambda,\mu)}(X) = \binom{X}{n}$. 6) Pour $\lambda_n = (\theta^n - 1)/(\theta - 1)$ $n \geq 0, \text{ord } \theta = \infty$, on a $\omega_n^{(\lambda)}(X) = \left(P_n^{(\theta)}[(\theta - 1)X + 1]\right)/((\theta - 1)^n)$. 7) Pour $\lambda_n = (\theta^n - 1)/(\theta - 1), \mu_n = \theta^n (\theta^{n+1} - 1)/(\theta - 1)$ $n \geq 0, \text{ord } \theta = \infty$ on a $Q_n^{(\lambda,\mu)}(X) = Q_n^{(\theta)}(X)$.

e. Notion générale de système unitaire triangulaire

Dans la suite on passe à la notion générale de système unitaire triangulaire. Un système triangulaire $A = (A_k^{n,m})$ satisfaisant aux relations (57) – (60) est dit non dégénéré si $A_{n+1}^{n,1} \neq 0$, ($n \geq 0$) et dégénéré dans le cas contraire. Tout système associé à un système non dégénéré est aussi non dégénéré. Pour le système A , la relation (60) peut être considérée comme les relations de récurrence (66) avec les coefficients $\mu_n = A_{n+1}^{n,1}$, $\lambda_n = A_n^{n,1}$ ($n \geq 0$), tandis que la relation (61) comme les conditions initiales dans (66) avec $\mu_0 = A_1^{0,1}$. Ainsi le système A est défini d'une manière uniforme. Autrement dit $A_k^{n,m} = \Pi_k^{n,m}$, où $\Pi_k^{n,m}$ est défini par les relations (66) avec les scalaires $\mu_n = \Pi_{n+1}^{n,1}$ et $\lambda_n = \Pi_n^{n,1}$ indiqués ci-dessus. Il s'en suit qu'un système non dégénéré est associé à un système unitaire.

Comme exemples de système non dégénéré on peut citer 1) $A = (\delta_{k(n+m)})$, 2) $A = \left(\binom{n,m}{k}_\theta\right)$, $\theta \in \mathcal{K}^* \setminus \{1\}$, 3) $A = \left(\binom{k}{n} \delta_{k(n+m)}\right)$, 4) $A = \binom{n,m}{k}$, 5) $A = \left(\left[\begin{smallmatrix} n & m \\ k & \end{smallmatrix}\right]_\theta\right)$, avec ($\text{ord } \theta = \infty$) et comme exmples de système dégénéré on peut citer 1) $A = \left(\left[\begin{smallmatrix} n & m \\ k & \end{smallmatrix}\right]_\tau\right)$, avec ($\text{ord } \tau = w < +\infty$), 2) $A = (\delta_{kn} \cdot \delta_{km})$.

La notion suivante permet de donner une caractéristique d'une suite triangulaire multipliable de polynômes. Une suite triangulaire multipliable par rapport à un système non dégénéré est appelée suite non dégénérée. Une suite associée à une suite non dégénérée est aussi non dégénérée.

Lemme V. 2.

Dans une algèbre A sans diviseurs de zéro toute suite triangulaire multipliable est non dégénérée.

Preuve :

En effet supposons que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ triangulaire multipliable par rapport à $A = (A_k^{n,m})$ soit dégénérée, i.e. il existe $n \geq 0$, pour lequel $A_{n+1}^{n,1} = 0$. Alors, d'après la formule (56) pour $m = 1$ on a $A_{n+1}^{n,1} a_{n+1} = a_n (a_1 - A_n^{n,1})$ ($n \geq 0$), d'où $a_n (a_1 - A_n^{n,1})$ ($n \geq 0$). Puisque $a_n \neq 0$, alors $a_1 = A_n^{n,1} \cdot 1, n \geq 0$. En tenant compte de (61) on obtient une contradiction avec l'indépendance linéaire. ■

Corollaire V. 2.

Toute suite triangulaire multipliable de polynômes à coefficients dans un corps commutatif est non dégénérée.

Remarque :

Notons que si $(P_n(X))_{n \geq 0}$ est une suite triangulaire multipliable de polynômes par rapport au système non dégénéré A et si $a \in A$, la suite $(P_n(a))_{n \geq 0}$ est une suite triangulaire multipliable par rapport à A .

On donne maintenant la forme générale d'une suite triangulaire multipliable.

Lemme V. 3.

Tout élément d'une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ triangulaire multipliable par rapport à $A = (A_k^{n,m})$ est de la forme :

$$a_n = \frac{a_1(a_1 - A_1^{1,1}) \dots (a_1 - A_{n-1}^{n-1,1})}{A_2^{1,1} \dots A_n^{n-1,1}} \quad (n \geq 1) \quad (70)$$

Preuve :

La démonstration se fait par récurrence sur n . ■

Pour un système triangulaire non dégénéré $A = (A_k^{n,m})$, on introduit, en se basant sur la formule (70), une suite de polynômes

$$P_0^{(A)}(X) = A_0^{0,0} = 1, \quad P_n^{(A)}(X) = \frac{X(X - A_1^{1,1}) \dots (X - A_{n-1}^{n-1,1})}{A_2^{1,1} \dots A_n^{n-1,1}} \quad (n \geq 1) \quad (71)$$

Notons que $P_n^{(A)}(X) = Q_n^{(\lambda, \mu)}(X)$, avec $\lambda_n = A_n^{n,1}$ et $\mu_n = A_{n+1}^{n,1}$.

Lemme V. 4.

La suite de polynômes $(P_n^{(A)}(X))_{n \geq 0}$ est triangulaire multipliable par rapport à $A = (A_k^{n,m})$.

Proposition V. 2.

Toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ non dégénérée, triangulaire multipliable par rapport à un système triangulaire $A = (A_k^{n,m})$ est de la forme :

$$a_n = P_n^{(A)}(a_1) \quad (72)$$

Corollaire V. 3.

Toute suite de polynômes $(P_n(X))_{n \geq 0}$ triangulaire multipliable par rapport au système $A = (A_k^{n,m})$ peut être représentée sous la forme $P_n(X) = P_n^{(A)}(P_1(X))$ ou bien de la forme $P_n(X) = P_n^{(A)}(cX + d)$, $c \neq 0$.

VI. CONCLUSION

On a présenté dans cet article les définitions et les constructions des polynômes dissociables et multipliables à partir des coefficients triangulaires. Nous remarquons que les polynômes orthogonaux satisfont les relations :

$$P_n(X) = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} A_k^{n,m} P_k(X)$$

plus générales et ne sont pas triangulaires multipliables.

REFERENCES

- [1] J. Riordan, Introduction to Combinatorial Analysis, Dover Publications, 2002.
- [2] J. Riordan, Combinatorial Identities, John Wiley & Sons Inc, 1968.
- [3] KA. Rybnikov., Vvedenie v kombinatornyj analiz (Introduction to combinatorial analysis), MGU, 1985 (russian).
- [4] Y. Li, D. Kim, L. Ma, "Gaussian binomial coefficients modulo cyclotomic polynomials", Journal of number theory, vol. 168, pp. 154-166, 2016.
- [5] G.E. Andrews, "On the foundations of combinatoriel theory. Eulerian differiantial operators", Stud. Appl. Math., vol. 50 n°4, pp. 345-375, 1971.

- [6] M. Aigner, "Combinatorial theory", Springer Verlag, 1979.
- [7] G.C. Rota, "On The Foundations of Combinatorial Theory". Theory of Möbius functions, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, vol 2, pp.340-368, 1964.
- [8] J. Goldman, G.C. Rota, "On the foundation of combinatorial theory IV. Finite vector space and eulerian generating function", Stud Apply. Math, vol. 49, pp 239-251, 1970.
- [9] G. Polya, How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method, Princeton University Press, 2004.
- [10] K. Iwasawa, Lectures on p-adic L functions, Princeton University Press, 1972.
- [11] H.H. Crapo, G. Carlo Rota, On The Foundations of Combinatorial Theory Combinatorial Geometries, The MIT Press, 1970.
- [12] E.W. Weisstein, Stirling Number of the First Kind, Math world (unpublished)
- [13] K.A. Rybnikov, Kombinatornij analiz. Zadachi i uprazhnenija (Combinatorial analysis. Problems and exercises), Nauka, 1962 (russian).
- [14] R. Corcino, On p,q-binomial coefficients, Research Gate, 2008.
- [15] F.H. Jackson, "q-form of Taylor's theorem", Messenger Math., vol. 39, pp. 62-64, 1909.
- [16] F.H. Jackson, "q-Difference equation", American Journal Math, vol. 32, pp. 305-314, 1910.
- [17] F.H. Jackson, "q-difference equations", American Journal Mathematics, vol. 32, pp.305-314.
- [18] L. Comtet, "Advanced combinatorics", The art of finite and infinite expansions, 1974.
- [19] I.E. Ovtcharenko, "Skaljarnye proizvedenija v prostranstve mnogochlenov i polozitel'nost'" (Scalar products in the space of polynomials and positivity), Journal Académie of sciences Ukraine série N°A, pp. 17-20, 1990 (russian).